Министерство науки и высшего образования РФ

Национальный исследовательский
Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского



МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И СУПЕРКОМПЬЮТЕРНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

ТРУДЫ XXIII МЕЖДУНАРОДНОЙ КОНФЕРЕНЦИИ

Нижний Новгород, 13–16 ноября 2023 г.

Нижний Новгород
Издательство Нижегородского госуниверситета
2023

УДК 004.942+519.876.5+519.6
ББК 22.18я43+22.19я43
М34

М34 **Математическое моделирование и суперкомпьютерные технологии.** Труды XXIII Международной конференции (Н. Новгород, 13–16 ноября 2023 г.) / Под ред. проф. Д.В. Баландина. – Нижний Новгород: Изд-во Нижегородского госуниверситета, 2023. – 179 с.

Отв. за выпуск К.А. Баркалов

ISBN 978-5-91326-834-1

Сборник материалов Двадцать третьей Международной конференции «Математическое моделирование и суперкомпьютерные технологии», состоявшейся 13−16 ноября 2023 г. на базе Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского, содержит тезисы докладов и короткие статьи, посвященные математическому моделированию сложных процессов и явлений, численным методам их исследования, а также проблемам разработки методов суперкомпьютерных вычислений для решения актуальных задач в различных областях науки, промышленности и образования.

Подробную информацию о конференции можно найти в сети Интернет по адресу http://agora.guru.ru/hpc2023.

Поддержка конференции

Программа академического лидерства Приоритет 2030

Научно-образовательный математический центр
«Математика технологий будущего»

ISBN 978-5-91326-834-1

УДК 004.942+519.876.5+519.6
ББК 22.18я43+22.19я43

© Авторы статей, 2023
© ННГУ им. Н.И. Лобачевского, 2023

ПРЕДИСЛОВИЕ

13–16 ноября 2023 г. в рамках международного конгресса «Суперкомпьютерные дни в России» на базе Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского при поддержке программы академического лидерства «Приоритет 2030» и научно-образовательного математического центра «Математика технологий будущего» проведена XXIII Международная конференция и молодежная школа «Математическое моделирование и суперкомпьютерные технологии».

Тематика конференции охватывала основные направления математического моделирования и суперкомпьютерных технологий:

- математическое моделирование динамики систем и процессов управления;
- теория динамических систем и бифуркаций;
- колебательные процессы в динамических сетях;
- модели и методы поддержки принятия решений;
- модели и методы искусственного интеллекта;
- математические модели в биологии и медицине;
- математическое моделирование природных процессов;
- алгебра, геометрия и дискретная математика;
- технологии параллельных и распределенных вычислений;
- применение суперкомпьютерных технологий для решения вычислительно-сложных задач.

В рамках молодежной школы была организована двухдневная интенсивная онлайн-программа обучения разработке и оптимизации программ для новых процессоров перспективной архитектуры RISC-V.

Основными задачами проведения мероприятия являлись представление актуальных результатов в области математического моделирования сложных процессов и явлений, обсуждение различных аспектов организации суперкомпьютерных вычислений, расширение контактов между специалистами для решения ресурсоемких прикладных задач, обмен опытом научно-образовательной деятельности при подготовке специалистов в области математического моделирования и параллельных вычислений.

Все перечисленные темы нашли отражение в настоящем сборнике тезисов докладов и коротких статей, представленных на конференцию (публикуются частично в авторской редакции).

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА ВЗРЫВНОГО РАЗРУШЕНИЯ ПОДВОДНОГО ГАЗОПРОВОДА НА ОСНОВЕ МЕТОДА ГОДУНОВА[1*]

М.Х. Абузяров, Е.Г. Глазова, А.В. Кочетков, М.А. Кочетков

Нижегородский госуниверситет им Н.И. Лобачевского

Моделируется процесс взрывного разрушения подводного двухслойного газопровода типа “Северный поток -2” при подрыве близко расположенного заряда октогена. Для решения применяется авторский пакет прикладных программ для решения трехмерных нестационарных задач взаимодействия элементов конструкций со сжимаемыми средами, основанный на единой модифицированной схеме Годунова для расчета совместного движения как газожидкостных, так и упругопластических сред. В пакете применен эйлерово-лагранжев подход с явным выделением подвижных контактных поверхностей между различными средами с применением трех типов расчетных сеток для каждой из сред. Это лагранжевы поверхностные сетки в виде STL файлов для задания пользователем начальной геометрии тел и для их сопровождения в процессе расчета, и два вида автоматически генерируемых в процессе расчета объемных трехмерных сеток. Приводятся результаты численных исследований с учетом близости дна и расположения заряда.

Ключевые слова: подводный газопровод, взрыв, метод Годунова, эйлеров-лагранжев подход, упругопластическая среда.

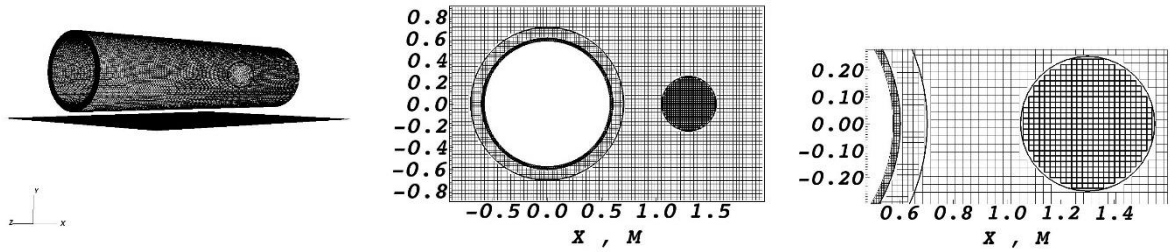
1. Введение

Для транспортировки газа в настоящее время широкое распространение получили подводные трубопроводы высокого давления, в частности газопроводы “Северный поток” и “Северный поток -2”[1], представляющий из себя стальную трубу (СТ), покрытую защитным слоем высокопрочного бетона, удерживающим газопровод на дне и фиксирующим трубу, чтобы ее не сносило течением. Эти трубопроводы в сентябре 2022 года подверглись террористической атаке и были разрушены взрывами. Проблемы воздействия взрывных нагрузок на подводные элементы конструкций рассматривались в работах [2-5]. В данной работе рассматривается задача ударного воздействия на фрагмент газопровода “Северный поток -2” от взрыва сферического заряда взрывчатого вещества (ВВ) – октогена, - инициированного в центре. Для моделирования используются уравнения динамики сплошных сред в виде [6,7] и соответствующий авторский пакет программ, реализованный на языке фортран с технологией распараллеливания openMP. Система решаемых уравнений включает законы сохранения массы, импульса, энергии и физические соотношения упругости и пластичности с учетом поворота тензора напряжений в эйлеровых переменных (производная Яумана), записанные в дифференциальной форме. В случае отсутствия сдвиговых напряжений система переходит в уравнения Эйлера для сжимаемой жидкости или газа [8]. К уравнениям добавляются начальные и краевые условия. На границах контакта тел ставятся условия непроникания и отсутствия трения. В этом случае на контактной поверхности отсутствуют сдвиговые напряжения и полагаются равными нормальные компоненты скоростей взаимодействующих сред. Для описания процессов в плотных сжимаемых средах (сталь, бетон) применяется баротропное уравнение состояния. Критерием перехода из упругого напряженно-деформированного состояния в пластическое является условие текучести Мизеса. Для воды используется уравнение состояния в форме Тета. Для моделирования процесса распространения детонации в заряде октогена применяется гидродинамическая теория детонации и лучевая модель распространения детонации.

[1*] Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки России в рамках государственного задания (проект № FSWR 2023-0036).

2. Моделирование взрывного нагружения подводного трубопровода.

Постановка задачи приведена на рис.1. Рассматривался участок трубопровода длиной 6 м, внутренний диаметр и толщина стальной трубы соответственно 115 и 2.7 см, толщина бетонного покрытия (БП) 10 см, параметры взяты из [1]. Предполагается, что нижняя часть трубопровода находится над жестким дном на высоте 19.8 см (ось трубопровода проходит на высоте 90 см от дна). Центр сферического заряда диаметром 0.5 м и массой 123 кг находится на высоте 65 см от дна на расстоянии 130 см от центра трубопровода (от поверхности заряда до бетонного покрытия трубы - 35 см). Инициация ВВ происходит в центре заряда. Размеры расчетной области 290x200x600 см, на внешних границах области ставятся условия “свободного вытока” [8]. Реализация этих условий осуществляется присвоением граничным значениям параметров из прилегающих ячеек. Начало координат находится на оси Z в середине трубы. В начальный момент давление во всех средах и внутри трубопровода полагалось равным 0.1 МПа. На рис.1a изображена поверхностная сетка (STL файлы всех объектов, кроме воды) по стальной трубе, бетонному покрытию и сферическому заряду ВВ; также изображена поверхность дна; всего, включая воду, порядка 500 тысяч треугольников. На рис. 1b приведена основная расчетная сетка (сечение в плоскости Z=0) по СТ, БП, воде и ВВ, размеры ячеек кубической сетки по каждой среде соответственно 0.5, 2, 3 и 2 см, всего - порядка 12 миллионов ячеек. На рис. 1c приведен увеличенный фрагмент этой сетки. Механические характеристики двухслойного трубопровода: сталь X70 и бетон с железорудным наполнителем [1], соответственно, плотности 7.85 и 2.5 г/см3, объемные модули упругости 168 и 22.2 ГПа, модули сдвига 77.7 и 15 ГПа, пределы текучести 500 и 80 МПа. Предполагается идеальная пластичность. Ввиду кратковременности нагрузок для бетона предполагалось равенство модулей на сжатие и растяжение.

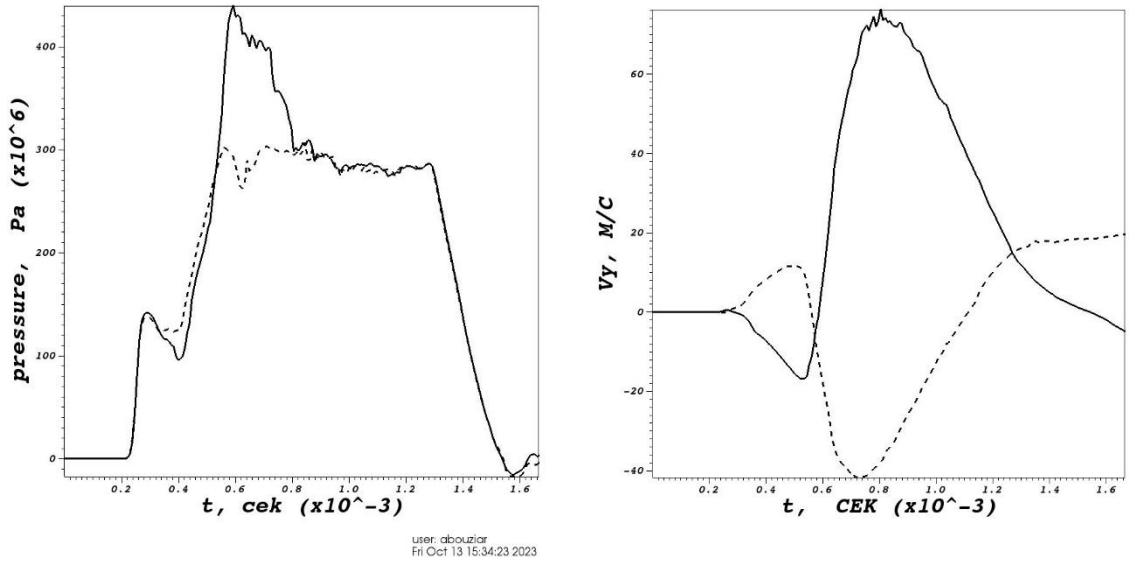


a) b) c)

Рис.1. a) поверхностная сетка, b) сетка в сечении Z=0, c) увеличенный фрагмент сетки в сечении Z=0

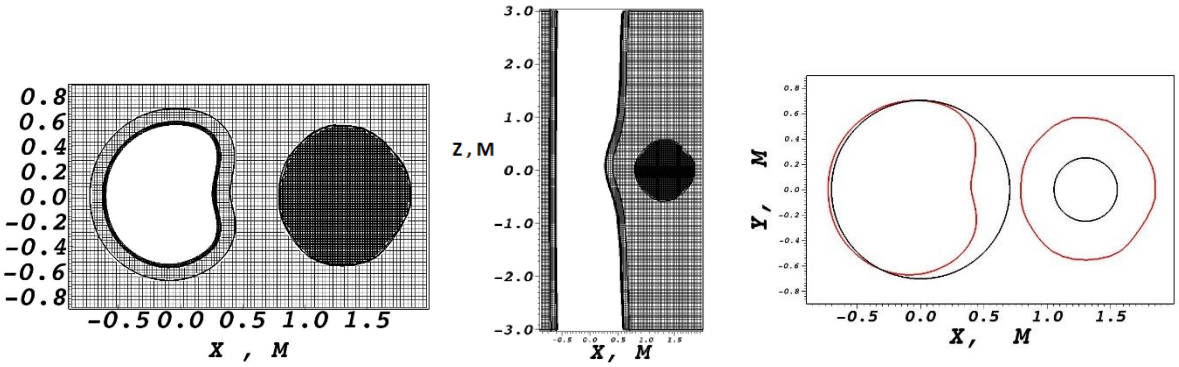
Расчеты проводились на компьютере с процессором i9-13900K (24 ядра, 32 потока) до времени 1.6 мс, соответствующему окончанию основной взрывной нагрузки. Расчет одного варианта занимал порядка 50 часов. Ударная волна от расширяющихся продуктов взрыва распространяется по водной среде и нагружает БП, которое в свою очередь взаимодействует со СТ. Максимальные давления на СТ порядка 1.4 ГПа наблюдаются в ближайшей к заряду точке СТ. В момент времени порядка 0.5 мс на трубопровод начинает влиять головная волна, отраженная от дна. На рис.2a и 2b приведены давления и вертикальные скорости от времени в сечении Z=0 на поверхности СТ, сплошными линиями на нижней стороне (ближайшей к дну) и штриховыми на верхней диаметрально противоположной. Очевидно существенное влияние отраженной от дна волны на процесс деформирования трубопровода. На рис. 3a и 3b показаны расчетные сетки на момент 1.6 мс соответственно в сечении Z=0 и Y=0. На рис. 3c черным цветом приведено положение заряда и СТ в сечении Z=0 в начальный момент и красным на момент времени 1.6 мс. Можно отметить большие перемещения поверхностей трубопровода. В сечении Z=0 в верхней и нижней областях СТ наблюдаются максимальные изгибы трубопровода, где окружные деформации сжатия к моменту времени 0.5 мс превышают 20% и продолжают расти до 100% к моменту 1.6 мс, аналогичным образом в этих точках ведут себя деформации по толщине трубы, достигая 100% растяжения на внешней поверхности. Следовательно, в этих областях происходит разрушение стальной трубы. На внешнем слое БП также возникают большие положительные деформации, превышающие 5%, что также ведет к разрушению БП. Таким об-

разом накопляющийся уровень деформаций при заданной нагрузке приводит к разрушению трубопровода.



a) b)

Рис.2. В сечении Z=0 a) давление, b) скорость от времени



a) b) c)

Рис.3. Расчетные сетки на момент 1.6 мс в сечении: a) Z=0 b) Y=0; начальное положение заряда ВВ и стальной трубы черными, на момент времени 1.6.мс красными линиями

Выводы

На основе разработанной авторской численной методики и соответствующего программного обеспечения решения трехмерных динамических задач сплошных сред проведено моделирование взаимодействия двухслойного трубопровода типа ”Северный поток-2” с ударными волнами в окружающей жидкости от близкого взрыва сферического заряда октогена весом 123 кг. Показана возможность разрушения подводного двухслойного трубопровода в областях максимального изгиба под действием этой взрывной нагрузки. Влияние расположения заряда может усилить воздействие взрывной волны на трубопровод за счет отражения от дна.

Литература

1. https://www.gazprom.ru/projects/nord-stream/
2. Замышляев Б.В., Яковлев Ю.С. Динамические нагрузки при подводном взрыве. Л. Судостроение. 1967. 387 с.

3. Explosion Hazards and Evaluation / W.E. Baker, P.A. Cox, P.S. Westine, J. Kulesz, R.A. Strehlow. Elsevier Scientific Publishing Company Amsterdam – Oxford – New York 1983. p 840.
4. V.S. Surov, Modeling of the interaction of an underwater shock wave and an obstacle in the presence of a bubble screen, J. Eng. Phys. Thermophys., 89. No 1. 90–99 (2016).
5. Сумской С.И., С Зайнетдинов.Х., Софьин А.С., Лисанов М.В., Агапов А.А. // Оценка параметров ударных волн при разрушении морских и сухопутных участков магистральных газопроводов. // НТС. Вестник газовой науки 2020. №3(45). с. 72-79.
6. Абузяров К.М. Метод распада разрывов в трехмерной динамике упругопластических сред // Проблемы прочности и пластичности, 2020. Т.82 № 3. С. 5-17.
7. Абузяров М.Х., Глазова Е.Г., Кочетков А.В., Крылов С.В. Численная методика решения трехмерных задач взаимодействия высокоскоростных газовых струй с упругопластическими преградами // ВАНТ. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2021. Вып.4. С.24-40.
8. Годунов С.К., Забродин А.В., Иванов М.Я., Крайко А.Н., Прокопов Г.П.. Численное решение многомерных задач газовой динамики. – М.: Наука, 1976. 400с.

О ПРОБЛЕМЕ ПОЛНОТЫ ДЛЯ ФУНКЦИОНАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ РАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ С РАЦИОНАЛЬНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ (АЛГОРИТМИЧЕСКИЙ ПОДХОД)

***Н.Ф. Алексиадис*[1,2]**

[1]*МГУ им. М.В. Ломоносова,*
[2]*Национальный исследовательский университет МЭИ*

Функциональная система (ф.с.) представляет собой множество функций с некоторым набором операций, применяемых к этим функциям и приводящих к получению других функций из этого же множества. Проблематика ф.с. обширна. Одной из основных является проблема полноты, состоящая в описании таких подсистем функций, которые являются полными, т.е. из этих функций с помощью заданных операций над ними можно получить все функции. Целью настоящего доклада является исследование проблемы полноты с алгоритмической точки зрения для ф.с. рациональных функций с рациональными коэффициентами: существует ли алгоритм, который распознает полноту или неполноту любой конечной системы рациональных функций, т.е. алгоритмически разрешима или нет проблема полноты.

Ключевые слова: функциональная система, проблема полноты, алгоритмическая неразрешимость, рациональная функция.

1. Введение

Этот доклад можно считать продолжением моих докладов на международных конференциях [1-3] о проблеме полноты для функциональных систем рациональных функций рациональными коэффициентами и моих статей [4-6].

Приведем предварительные сведения из теории функциональных систем, необходимые для дальнейшего изложения.

При изложении материала в основном используется терминология книг [7, 8].

Мы будем использовать следующие стандартные обозначения:

N – множество всех натуральных чисел (включая число 0),

Z – множество всех целых чисел,

Q – множество всех рациональных чисел,

Для удобства полагаем, что $0^0 = 1$.

Говорят, что функция $f(x_1, \cdots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \cdots, x_n)$ *существенно зависит от переменной* x_i, если существуют такие два набора (из области определения этой функции)

$$c_1, \cdots, c_{i-1}, a, c_{i+1}, \cdots, c_n \text{ и } c_1, \cdots, c_{i-1}, b, c_{i+1}, \cdots, c_n$$

значений переменных $x_1, \cdots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \cdots, x_n$, что

$$f(c_1, \cdots, c_{i-1}, a, c_{i+1}, \cdots, c_n) \neq f(c_1, \cdots, c_{i-1}, b, c_{i+1}, \cdots, c_n).$$

В этом случае мы говорим, что x_i является *существенной переменной функции* $f(x_1, \cdots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \cdots, x_n)$.

Если x_i не является существенной переменной $f(x_1, \cdots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \cdots, x_n)$ то она называется *фиктивной* (*несущественной*) *переменной* функции $f(x_1, \cdots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \cdots, x_n)$.

Пусть $f(x_1, \cdots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \cdots, x_n)$ и $g(x_1, \cdots, x_{i-1}, x_{i+1}, \cdots, x_n)$ две произвольные заданные функции и пусть x_i фиктивная переменная функции $f(x_1, \cdots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \cdots, x_n)$.

Если для любых $c_1, \cdots, c_{i-1}, c_i, c_{i+1}, \cdots, c_n$ значений переменных $x_1, \cdots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \cdots, x_n$ имеем

$$f(c_1, \cdots, c_{i-1}, c_i, c_{i+1}, \cdots, c_n) = g(c_1, \cdots, c_{i-1}, c_{i+1}, \cdots, c_n),$$

то говорят, что функция $g(x_1, \cdots, x_{i-1}, x_{i+1}, \cdots, x_n)$ получается из функции $f(x_1, \cdots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \cdots, x_n)$ *удалением* (*изъятием*) *фиктивной переменной* x_i и, наоборот,

функция $f(x_1,\cdots,x_{i-1},x_i,x_{i+1},\cdots,x_n)$ получена из функции $g(x_1,\cdots,x_{i-1},x_{i+1},\cdots,x_n)$ *добавлением фиктивной переменной* x_i.

Если одна функция может быть получена из другой функции путем добавления или изъятия некоторых фиктивных переменных, то эти две функции являются *равными*.

Замечание 1. В дальнейшем будем считать, что вместе с функцией *f* заданы и все равные ей функции, т.е. функции рассматриваем с точностью до фиктивных переменных.

Замечание 2. Если дана конечная система функций $f_1,\cdots,f_m$ $(m \geq 1)$, то можно считать, что все они зависят от одних и тех же переменных $x_1,\cdots,x_n$, т.е. имеют вид

$$f_1(x_1,\cdots,x_n),\cdots,f_m(x_1,\cdots,x_n).$$

Замечание 3. Если дана функция, отличная от константы, то путем отождествления переменных из нее можно получить равную ей функцию, все переменные которой являются существенными.

Функциональная система (*ф.с.*) представляет собой множество функций с некоторым набором операций, применяемых к этим функциям и приводящих к получению других функций из этого же множества, т.е. *функциональная система* – это пара вида **F** = (*F*, *O*), где *F* – множество функций, а *O* – множество операций над этими функциями, при этом каждая операция из *O* замкнута относительно множества *F*.

Для произвольного подмножества $A \subseteq F$ обозначим через [*A*] множество всех функций из *F*, которые получаются из функций множества *A* с помощью конечного числа применения операций из *O*. Множество [*A*] называется *замыканием множества A*.

Множество *A* (A ⊆ F) называется *замкнутым* в функциональной системе **F**, если [*A*] = *A*.

Замкнутое множество принято называть *замкнутым классом*.

Множество *A* (A ⊆ F) называется *полным* в функциональной системе **F**, если [*A*] = *F*.

Полное множество принято называть *полной системой*.

Подмножество *A* множества *F* называется *предполным* (*максимальным*) *классом* в **F**, если $[A] \neq F$, но для любой функции *f* из F\A выполнено $[A \cup \{f\}] = F$.

Основной проблемой теории функциональных систем является *проблема полноты, состоящая в описании всех подмножеств A множества функций F, которые являются полными в ф.с.* **F** = (*F*, *O*).

Система *K* замкнутых подмножеств множества *F* называется *критериальной системой* в ф.с. **F** = (*F*, *O*), если любое множество *M* (*M* ⊆ *F*) является полным в **F** тогда и только тогда, когда оно целиком не содержится ни в одном классе системы *K*.

В ф.с. **F** = (*F*, *O*) критериальной системой является, например, множество всех замкнутых классов, отличных от всего *F*. В общем случае последняя критериальная система является "избыточной". Это позволяет перейти к рассмотрению более "экономных" критериальных систем и с этой точки зрения может быть уточнено строение критериальной системы.

Критериальная система называется *приведенной*, если она не содержит собственных подсистем, являющихся критериальными.

Замечание 4. Следует отметить, что в функциональной системе **F** приведенная система, если она существует, определяется однозначно и состоит из всех предполных классов в **F** (см., например, [7]).

2. Определение функциональной системы рациональных функций с рациональными коэффициентами

Выражение вида $cx_1^{k_1}\cdots x_n^{k_n}$, где $n,k_1,\cdots,k_n \in N$, а $c \in Q$ называется *мономом с рациональным коэффициентом*, зависящим от n переменных $x_1,\cdots,x_n$; при этом, когда $n = 0$, тогда заданный моном является просто константой *c*, т.е. мономом с рациональным коэффициентом, зависящим от 0-го числа переменных.

Конечная сумма мономов с рациональными коэффициентами называется *полиномом с рациональными коэффициентами*.

Функция вида

$$f(x_1,\cdots,x_n)\colon \underbrace{Q\times\cdots\times Q}_{n} \to Q,$$

которая задается с помощью полинома с рациональными коэффициентами, называется *полиномиальной функцией с рациональными коэффициентами*.

Следует обратить внимание на то, что аргументы полиномиальных функцией с рациональными коэффициентами и сами эти функции принимают только рациональные значения.

Функция вида

$$f(x_1, \cdots, x_n) = \frac{g(x_1, \cdots, x_n)}{h(x_1, \cdots, x_n)},$$

где $g(x_1, \cdots, x_n)$ и $h(x_1, \cdots, x_n)$ – полиномиальные функции с рациональными коэффициентами, называется рациональной функцией с рациональными коэффициентами.

Следует обратить внимание на то, что аргументы рациональных функций с рациональными коэффициентами и сами эти функции принимают только рациональные значения.

Рациональные функции с рациональными коэффициентами будем также называть *rq-функциями*.

Обозначим через F_{RQ} множество всех рациональных функций с рациональными коэффициентами.

Функциональная система рациональных функций с рациональными коэффициентами $\mathbf{F}_{RQ}$ – это пара $\mathbf{F}_{RQ} = (F_{RQ}, O)$, где F_{RQ} – множество всех рациональных функций с рациональными коэффициентами, а O – множество операций суперпозиции над рациональными функциями с рациональными коэффициентами, которое включает в себя:

1. перестановка переменных,
2. переименование переменных без отождествления,
3. отождествление переменных,
4. введение фиктивной переменной,
5. удаление фиктивной переменной,
6. подстановка одной функции в другую.

Заметим, что определение функциональной системы рациональных функций с рациональными коэффициентами $\mathbf{F}_{RQ} = (F_{RQ}, O)$ корректное, так как любая суперпозиция функций из F_{RQ} является опять функцией из F_{RQ}.

3. Постановка задачи

Одной из основных проблем в теории функциональных систем является *проблема полноты*, состоящая в описании всех подмножеств данного множества *F*, которые являются полными в **F** = (*F*, *O*).

В теории функциональных систем выделяют два подхода к решению проблемы полноты: *алгоритмический* и *алгебраический*. В первом случае ставится вопрос о существовании алгоритма, устанавливающего полноту или неполноту заданных систем функций. Во втором случае задача заключается в получении критериев (т.е. необходимых и достаточных условий) полноты.

Изучение проблемы полноты осуществлялось путем исследования конкретных функциональных систем. Во многих этих конкретных системах решение проблемы полноты было сведено к описанию всех предполных классов в ней, суть которого заключается в следующем: данная система функций является полной тогда и только тогда, когда она целиком не содержится ни в одном из предполных классов. Исторически сложилось так, что метод решения проблемы полноты в терминах предполных классов стал одним из основных для функциональных систем.

При изучении проблемы полноты для функциональной системы рациональных функций с рациональными коэффициентами мы рассматриваем следующие основные задачи:

1. Алгебраический вариант проблемы полноты:
   1.1. *является ли множество всех предполных классов* (*приведенной*) *критериальной системой*?
   1.2. *найти число предполных классов, т.е. мощность* (*приведенной*) *критериальной системы*.
2. Алгоритмический вариант проблемы полноты:
   2.1. *алгоритмически разрешима или нет проблема полноты*?

4. Решение проблемы полноты для рациональных функций с рациональными коэффициентами

При изучении проблемы полноты с алгебраической точки зрения для функциональной системы рациональных функций с рациональными коэффициентами автором было установлено справедливость следующих теорем, что было сообщено в [3].

Теорема 1. В функциональной системе рациональных функций с рациональными коэффициентами $\mathbf{F}_{RQ} = (F_{RQ}, O)$ множество всех предполных классов является (приведенной) критериальной системой, т.е. произвольная система *rq*-функций является полной тогда и только тогда, когда она целиком не содержится ни в одном предполном классе.

Теорема 2. В функциональной системе рациональных функций с рациональными коэффициентами $\mathbf{F}_{RQ} = (F_{RQ}, O)$ мощность критериальной системы равна континууму.

А при дальнейшем исследовании проблемы полноты с алгоритмической точки зрения для функциональной системы рациональных функций с рациональными коэффициентами было получено следующее утверждение:

Теорема 3. В функциональной системе рациональных функций с рациональными коэффициентами $\mathbf{F}_{RQ} = (F_{RQ}, O)$ проблема полноты алгоритмически неразрешима.

5. Заключение

Функциональные системы являются одним из основных объектов дискретной математики и математической кибернетики и отражают следующие основные особенности реальных и абстрактных управляющих систем: функционирование (в функциональных системах - это функции), правила построения более сложных управляющих систем из заданных и описание функционирования сложных систем по функционированию их компонент (последние два момента отражены в операциях функциональных систем).

В настоящей работе решается проблема полноты для функциональной системы рациональных функций с рациональными коэффициентами, которая играет ключевую роль не только в самой дискретной математике и математической кибернетике, но и во многих других областях математики, например, в теории функций (аппроксимационные теоремы Чебышева и Вейерштрасса), в вычислительной математике и технике (построение и анализ вычислительных чипов и нейронных сетей). Актуальность полученных результатов также состоит и в развитии самой теории функциональных систем как в плане охвата новых модельных объектов типа рациональных функций, так и в вычленении позитивных результатов, и в отсечении негативных ситуаций типа алгоритмической неразрешимости проблемы полноты.

В заключении отметим, что целью данного доклада, как уже было сказано выше, было изучение проблемы полноты с алгоритмической точки зрения для функциональной системы рациональных функций с рациональными коэффициентами. Полученная на этом пути теорема (3) об алгоритмической неразрешимости проблемы полноты для ф.с. $\mathbf{F}_{RQ} = (F_{RQ}, O)$ является основным результатом данной работы.

Литература

1. Алексиадис Н.Ф. О рациональных А-функциях с рациональными коэффициентами // Материалы XIX Международной конференции “Алгебра, теория чисел, дискретная геометрия и многомасштабное моделирование: современные проблемы, приложения и проблемы истории”, посвященной 200-летию со дня рождения академика П. Л. Чебышева – Тула, 2021. С. 97-101.
2. Алексиадис Н.Ф. О базисах рациональных функций с рациональными коэффициентами // Материалы XIX Международной конференции “Алгебра, теория чисел, дискретная геометрия и многомасштабное моделирование: современные проблемы, приложения и проблемы истории”, посвященной 130-летию со дня рождения академика И. М. Виноградова – Тула, 2021. С. 77-80.

3. Алексиадис Н.Ф. О проблеме полноты рациональных функций с рациональными коэффициентами // Тезисы Международной конференции “Мальцевские чтения” (2021 г.) – Новосибирск, 2021. С. 77-80.
4. Алексиадис Н.Ф. Рациональные А-функции с рациональными коэффициентами // Чебышевский сборник, 2022, т. 23, вып. 4, с. 11–19. (DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-4-11-19).
5. Алексиадис Н.Ф. О замкнутых классах в функциональной системе рациональных функций с рациональными коэффициентами //Интеллектуальные системы. Теория и приложения. – Т.25, вып. 4. 2021. С. 62-65.
6. Алексиадис Н.Ф. Базисы полных систем рациональных функций с рациональными коэффициентами // Чебышевский сборник, 2023, т. 24, вып. 2, С. 2–11. (DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-2-2-11).
7. Кудрявцев В.Б. Функциональные системы. – М.: Изд-во МГУ, 1982. 157 с.
8. Яблонский С.В. Введение в дискретную математику. – М.: Изд-во Наука, 1986. 384 с.

КУСОЧНО-ЛИНЕЙНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СИСТЕМ ЛОРЕНЦЕВСКОГО ТИПА[1*]

Д.А. Бакалина[1], Н.В. Барабаш[1,2]

[2]Нижегородский госуниверситет им Н.И. Лобачевского,
[2]Волжский государственный университет водного транспорта

В докладе рассматривается трёхмерная кусочно-линейная система лоренцевского типа. Показано, что в зависимости от значения параметра ν, играющего роль седлового индекса, наблюдается два различных бифуркационных сценария рождения хаотических аттракторов. Приводится численное сравнение бифуркационных сценариев в кусочно-линейной системе и в гладких аналогах.

Ключевые слова: динамическая система, странный аттрактор Лоренца, система Любимова-Закса, бифуркации, кусочно-линейная система, гомоклиническая орбита.

В докладе приводится численное сравнение сценариев рождения аттракторов в кусочно-линейной системе лоренцевского типа [1-3] с системой Лоренца [4] и системой Любимова-Закса [5]. Кусочно-линейная система A образована тремя линейными подсистемами A_s, A_l и A_r

$$A_s:\begin{cases}\dot{x}=x,\\ \dot{y}=-\alpha y,\\ \dot{z}=-\nu z,\end{cases}\qquad A_{l,r}:\begin{cases}\dot{x}=-\lambda(x\pm 1)+\omega(z-b),\\ \dot{y}=-\delta(y\pm 1),\\ \dot{z}=-\omega(x\pm 1)-\lambda(z-b),\end{cases}\qquad (1)$$

где α, δ, ν, ω, λ, b — положительные параметры. Системы $A_{s,r,l}$ определены в смежных областях фазового пространства $G_s=\{|x|<1, y\in\mathbb{R}^1, z<b,\}, G_l=\{x\le -1, z\le b; x\le -1, z>b, y\le 0, x<1, z>b, y<0\}$ и $G_r=\mathbb{R}^3\backslash\{G_s\cup G_l\}$ соответственно.

Показано, что в зависимости от параметра ν, являющегося седловым индексом седла в начале координат, в системе A наблюдаются два различных бифуркационных сценария.

При ν < 1 реализуется сценарий, аналогичный переходу к хаосу в системе Лоренца, а именно сценарий рождения сингулярно-гиперболического аттрактора лоренцевского типа, проходящий через гетероклиническую бифуркацию сепаратрис седла и седловых предельных циклов.

При ν > 1 переход к хаосу реализуется через каскад чередующихся гомоклинических бифуркаций седла и бифуркаций “вилка” устойчивых предельных циклов, приводящих к удвоению периода устойчивых периодических орбит с их последующим раздваиванием. Этот сценарий аналогичен сценарию в системе Любимова-Закса

$$\begin{cases}\dot{x}=-\sigma x+\sigma y+\sigma y D(z-r),\\ \dot{y}=rx-y-xz,\\ \dot{z}=xy-bz.\end{cases}$$

Качественно и численно мы демонстрируем сходство системы A с системой Лоренца и системой Любимова-Закса по основным свойствам и сценариям рождения аттракторов. Однако, в отличие от своих гладких аналогов, кусочно-линейная система A позволяет провести полное аналитическое исследование, включая доказательство существования странного аттрактора и глобальных бифуркаций.

[1*] Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования (проект № 0729-2020-0036).

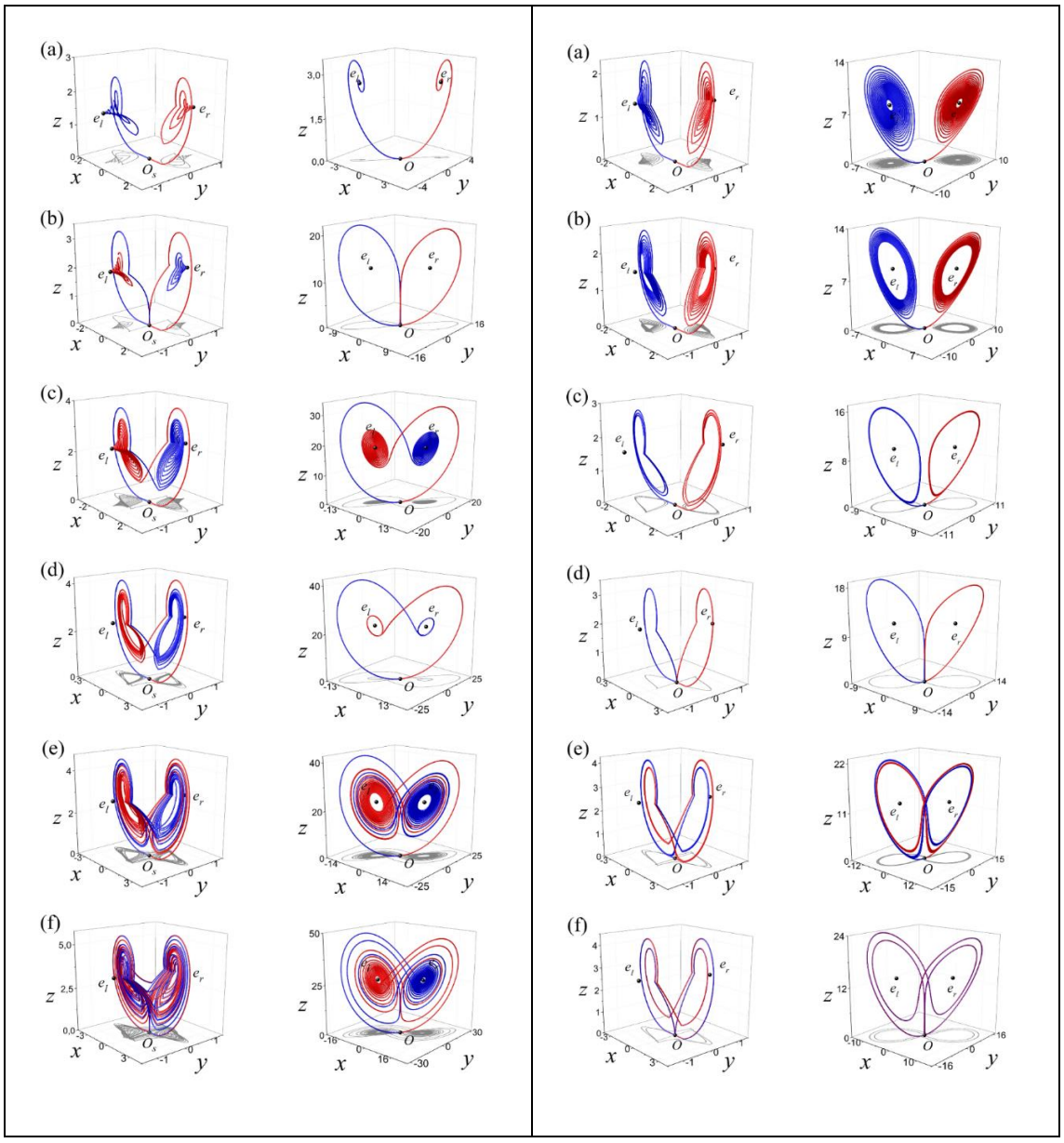


Рис. 1. Сопоставление изменения фазовых портретов кусочно-линейной системы (1) при $\nu < 1$ и системы Лоренца (слева) и системы (1) при $\nu > 1$ и системы Любимова-Закса (справа) при изменении бифуркационных параметров b и r.

Литература

1. Belykh V.N., Barabash N.V., Belykh I.V. A Lorenz-type attractor in a piecewise-smooth system: Rigorous results // Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science. 2019. Vol. 29, No. 10, P. 103108. DOI:10.1063/1.5115789.
2. Belykh V.N., Barabash N.V., Belykh I.V. Bifurcations of chaotic attractors in a piece-wise smooth Lorenz-type system // Automation and Remote Control. 2020. Vol. 81, No. 8, P. 1385–1393. DOI:10.1134/S0005117920080020.
3. Belykh V.N., Barabash N.V., Belykh I.V. Sliding homoclinic bifurcations in a Lorenz-type system: Analytic proofs // Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science. 2021. Vol. 31, No. 4, P. 043117. DOI:10.1063/5.0044731.
4. Lorenz E.N. Deterministic nonperiodic flow // Journal of atmospheric sciences. 1963. Vol. 20, No. 2, P. 130–141. DOI:10.1177/0309133315623099.

5. Lyubimov D.V., Zaks M.A. Two mechanisms of the transition to chaos in finite-dimensional models of convection // Physica D: Nonlinear Phenomena. 1983. Vol. 9, No. 1-2, P. 52–64. DOI:10.5890/JVTSD.2021.12.005.

ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ БЫСТРОПРОТЕКАЮЩИХ МЕХАНИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ МЕТОДОМ МИКРОВОЛНОВОЙ ИНТЕРФЕРОМЕТРИИ БЕЗ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЧАСТОТЫ[1*]

В.В. Баландин[1], Вл.Вл. Баландин[1], А.В. Водопьянов[2,3], Д.А. Мансфельд[2,3], К.В. Минеев[2,3], В.В. Пархачёв[2], Р.М. Розенталь[2,3]

[1]Нижегородский госуниверситет им Н.И. Лобачевского, НИИ Механики
[2]Нижегородский государственный университет им Н.И. Лобачевского, Лаборатория источников интенсивного излучения миллиметрового диапазона
[3]Институт прикладной физики РАН

Представлен алгоритм обработки результатов измерений быстрых деформаций поверхности при зондировании микроволновым сигналом. На примере обработки экспериментальных результатов по измерению амплитуды поперечных деформаций металлического стержня, вызванных ударной нагрузкой, показано хорошее соответствие расчетных и измеренных данных, демонстрирующее возможность измерения отклонений поверхности на временах порядка 1 мкс с точностью около 1 мкм и относительной погрешностью около 8%.

Ключевые слова: микроволновая интерферометрия, быстропротекающие процессы, интерферограмма

1. Введение

Измерение перемещений поверхности тех или иных объектов является одним из наиболее востребованных приложений методов микроволновой интерферометрии. В этом направлении достигнуты впечатляющие успехи, позволяющие измерять расстояние до объектов с микронной точностью [1,2], а амплитуду вибраций с точностью 0.1 и менее микрометра [3]. Вместе с тем, основное внимание уделяется измерению относительно медленных сдвигов поверхности с характерным временем от долей миллисекунд до десятков секунд. В качестве примера можно привести измерения сердечной, сосудистой и дыхательной активности, распознавание речи в условиях отсутствия акустического сигнала, позиционирование деталей в обрабатывающих станках, измерение вибраций транспортных путепроводов.

При этом существует область применения методов микроволновой интерферометрии, связанная с диагностикой быстропротекающих процессов с характерной длительностью единицы и десятки микросекунд. Прежде всего это измерение скорости движения фронтов детонационных процессов, исследования свойств плазмы, генерируемой при воздействии на вещество мощных ударных волн, измерение динамики перемещения высокоскоростных механических объектов и сопровождающих их процессов ионизации газов. Однако в этих приложения точность измерений существенно ниже.

В данном материале представлен алгоритм обработки измерений быстропротекающих процессов методом микроволновой интерферометрии без преобразования частоты. На примере экспериментального измерения поперечной деформации упругого образца при ударном воздействии продемонстрирована возможность измерения отклонений поверхности на временах порядка 1 мкс с точностью около 1 мкм.

[1*] Исследование выполнено при поддержке Программы стратегического академического лидерства «Приоритет 2030» ННГУ им. Н.И. Лобачевского (проект № 428-99_2022-2023).

2. Алгоритм обработки микроволнового сигнала

Будем полагать, что у нас есть источник монохроматического микроволнового излучения с частотой f_0, часть которого подается на вход быстродействующего цифрового осциллографа, частота дискретизации которого в несколько раз превышает частоту сигнала. Оставшаяся часть излучается передающей антенной, отражается от измеряемой поверхности и попадает в приемную антенну, сигнал с которой также подается на вход осциллографа.

Излучаемый сигнал запишем в следующем виде:

$$S(t) = A_0 \cos(\omega t + \varphi_0), \tag{1}$$

где $\omega = 2\pi f_0$, A_0 и φ_0 – начальные амплитуда и фаза сигнала. В свою очередь принятый сигнал запишем в виде:

$$R(t) = A_1 \cos(\omega t + \varphi_0 - \Delta\varphi(t)), \tag{2}$$

где A_1 – амплитуда принятого сигнала, а $\Delta\varphi(t)$ – дополнительный набег фазы. Дополнительный набег фазы имеет постоянную часть φ_1, определяемую начальным расстоянием до объекта исследования и условиями отражения от объекта, и переменную часть, обусловленную изменением оптической длины пути, проходимого сигналом, из-за изменения расстояния до объекта в течение эксперимента:

$$\Delta\varphi(t) = \varphi_1 + hL(t), \tag{3}$$

где $h = 2\pi/\lambda$ – волновое число, $L(t)$ – закон изменения длины пути, которую проходит зондирующий сигнал. Полагая, что зондирование происходит под углом α, а угол падения излучения равен углу его отражения, закон изменения оптической длины пути $L(t)$ можно выразить через закон перемещения точки отражения $x(t)$:

$$L(t) = 2x(t)\cos\alpha. \tag{4}$$

В общем случае угол α меняется при перемещении объекта. Однако в случае малых перемещений изменением угла можно пренебречь. Таким образом, дополнительный набег фазы запишется в виде:

$$\Delta\varphi(t) = \varphi_1 + 2hx(t)\cos\alpha. \tag{5}$$

Поскольку $\Delta\varphi(t) << \omega t$, принятый сигнал является узкополосным, и можно говорить о его мгновенной фазе. Для определения мгновенной фазы узкополосных сигналов удобно использовать формализм аналитического сигнала, который представляет собой комплексный сигнал, действительная часть которого совпадает с исходным действительным сигналом, а мнимая часть находится в квадратуре с действительной.

С практической точки зрения, аналитический сигнал проще всего получить фильтрацией исходного действительного сигнала в частотной области фильтром с коэффициентом передачи $H(\omega) = 2\sigma(\omega)$, где $\sigma(\omega)$ – функция Хевисайда. После фильтрации соответствующие сигналы имеют следующий вид:

$$\hat{S}(t) = A_0 e^{i(\omega t + \varphi_0)}, \hat{R}(t) = A_1 e^{i(\omega t + \varphi_0 - \Delta\varphi(t))}. \tag{6}$$

Полезную информацию содержит разность фаз $\Delta\varphi(t)$ данных сигналов. Чтобы избавиться от осцилляций с частотой ω и оставить только интересующую нас зависимость от времени, принятый сигнал необходимо умножить на комплексно сопряжённый к опорному, тогда получившийся сигнал, представляющий собой интерферограмму процесса [4,5], можно представить в виде:

$$\hat{R}_{\text{int}}(t) = \hat{R}(t)\hat{S}^*(t) = A_0 A_1 e^{-i\Delta\varphi(t)} = Ae^{i\Phi(t)}, \tag{7}$$

где "*" обозначает операцию комплексного сопряжения. Очевидно, что с точностью до множителя A_0 интерферограмма является комплексной огибающей принятого сигнала. Медленное (по сравнению с $2\pi/\omega$) изменение амплитуды принятого сигнала A_1, если оно имеет место, не помешает извлечению информации о фазе интерферограммы. Синхронное детектирование, использованное для получения интерферограммы, нивелирует влияние нестабильности частоты генератора зондирующего сигнала.

Фаза интерферограммы $\Phi(t)$ может быть найдена следующим образом:

$$\Phi(t) = \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{Im}\left(\hat{R}_{\text{int}}(t)\right)}{\operatorname{Re}\left(\hat{R}_{\text{int}}(t)\right)}. \tag{8}$$

Заметим, что описанная процедура является оптимальной процедурой оценки фазы узкополосного сигнала на фоне гауссовых помех [6]. В свою очередь перемещение отражающей границы исследуемого объекта находится из следующего соотношения:

$$\frac{\Phi(t)}{2h\cos\alpha} = -\frac{\Delta\varphi(t)}{2h\cos\alpha} = -\frac{\varphi_1 + 2hx(t)\cos\alpha}{2h\cos\alpha} = -x(t) - \frac{\varphi_1}{2h\cos\alpha}. \tag{9}$$

Считая, что перемещение в начальный момент времени равно нулю, т.е. что $x(0) = 0$, найдём неизвестную константу $\varphi_1 = -\Phi(0)$, и в результате:

$$x(t) = \frac{\Phi(0) - \Phi(t)}{2h\cos\alpha}. \tag{10}$$

Точность оценки перемещения можно повысить, если усреднить перемещение на некотором достаточно коротком интервале времени, в течение которого изменением координаты объекта исследования можно пренебречь. Однако при высоком уровне шума может возникать неустранимая неоднозначность в определении мгновенной фазы интерферограммы, кратная 2π, поэтому усреднять нужно не фазу или перемещение, а (комплексные) значения интерферограммы $\hat{R}_{\text{int}}(t)$ на некотором интервале времени, после чего определять фазу усреднённой интерферограммы.

3. Экспериментальное измерение быстрых отклонений поверхности

Экспериментальные исследования проводились на установке РГС-60, реализующей классический вариант метода Кольского на сжатие [7]. Установка состоит из газовой пушки калибром 57 мм, использующей для разгона ударника сжатый воздух, и двух мерных стержней длиной 1.5 м каждый. При проведении экспериментов использовался только один мерный стержень диаметром 60 мм, выполненный из алюминиевого сплава с известным значением коэффициента Пуассона $\nu = 0.33$. Скорость ударника, выполненного из того же сплава, выбиралась таким образом, чтобы избежать пластической деформации стержня, и составляла $V = 10$ м/с. Известно, что в тонком стержне, поперечные размеры которого малы по сравнению с его длиной, при продольном упругом ударе и отсутствии геометрической дисперсии возникает продольная упругая волна сжимающих напряжений, которая распространяется вдоль стержня [8]. Длительность упругого импульса в стержне определяется удвоенной длиной ударника и скоростью звука в стержне. Напряженно-деформированное состояние материала стержня однородно в поперечных сечениях. При этом продольные деформации сжатия материала стержня сопровождаются поперечными деформациями растяжения. Отношение соответствующих поперечных и продольных деформаций будет равно коэффициенту Пуассона.

Импульс упругой продольной деформации сжатия стержня, возбужденный ударником, определялся по сигналам, зарегистрированным с помощью малобазных тензорезисторов, наклеенных на поверхности стержня в поперечном сечении на расстоянии половины длины стержня от ударяемого торца. В свою очередь, величина поперечной деформации определялась на основе данных интерферометрии.

Для определения точности измерений поперечных деформаций стержня воспользуемся известным выражением для коэффициента Пуассона:

$$\nu = \left| \frac{\varepsilon_{\perp}}{\varepsilon_{\parallel}} \right|, \tag{11}$$

где $\varepsilon_{\perp}, \varepsilon_{\parallel}$ – величины относительной поперечной и продольной деформации. Поперечная деформации связана с абсолютной величиной перемещения боковой поверхности d простым соотношением:

$$\varepsilon_{\perp} = \frac{d}{r_0}, \tag{12}$$

где r_0 – радиус стержня. Таким образом, сопоставляя график зависимости величины поперечной деформации от времени

$$d(t) = \nu r_0 \varepsilon_{\parallel}(t) \tag{13}$$

с графиком $x(t)$, полученным из выражения (10) на основе обработки результатов интерферометрических измерений, можно оценить точность измерений. В нашем случае радиус стержня составлял $r_0 = 30$ мм, а коэффициент Пуассона используемого алюминиевого сплава составляет $\nu = 0.33$.

На рис.1 представлены расчетная зависимость $d(t)$ и экспериментально измеренная $x(t)$. Абсолютная величина поперечного смещения составила около 7 мкм, разброс значений шумовой составляющей, характеризующей точность измерения интерферометром, находится на уровне ±1 мкм. Начиная с момента времени 130 мкс в точку измерения приходит изгибная волна, которая регистрируется только интерферометром, поэтому графики начинают расходиться. На интервале 50-130 мкс среднеквадратичное отклонение $d(t)$ и $x(t)$ составляет 0.54 мкм (7.7%), а их среднее значение на данном интервале отличается на 0.12 мкм (1.7%).

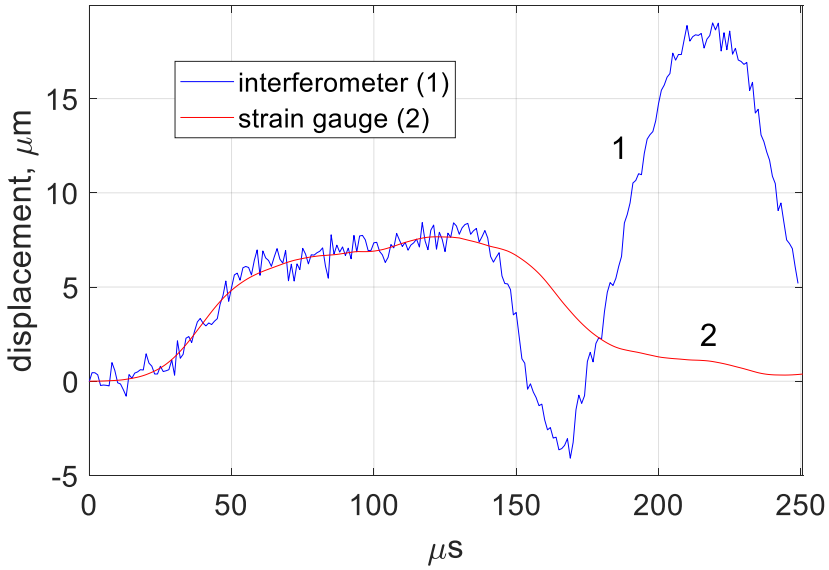


Рис. 1. Зависимость расчетной и измеренной поперечной деформации от времени

Если рассматривать проведённые эксперименты как способ оценки коэффициента Пуассона материала по формуле (11), то отклонение отношения $x(t)/d(t)$ от единицы характеризует относительную погрешность измерения коэффициента Пуассона в проведённых экспериментах. В нашем случае на интервале 50-130 мкс погрешность мгновенных оценок коэффициента Пуассона составила 8%, а погрешность оценки среднего значения коэффициента Пуассона по всему интервалу составила 2%.

4. Заключение

Интерферометрические методы диагностики с использованием излучения миллиметрового диапазона длин волн имеют ряд достоинств при исследовании высокоскоростных процессов, наиболее важным из которых является возможность непрерывной регистрации, в том числе в достаточно протяженных оптически непрозрачных средах. Характерные размеры шероховатостей поверхностей ударников и металлических оболочек, отражающих микроволновое излучение, значительно меньше длины волны излучения, поэтому такие поверхности для микроволнового излучения являются гладкими, в то время как для лазерного излучения – диффузно-отражающими. Возможности современной измерительной техники позволяют использовать

различные схемы построения высокочастотных трактов радиоинтерферометров, в том числе и без преобразования частоты, обеспечивающие высокую точность измерений быстропротекающих механических процессов.

Литература

1. Pauli M., Göttel B., Scherr S., et al. Miniaturized Millimeter-Wave Radar Sensor for High-Accuracy Applications // IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques. 2017. Vol. 65. No. 5. P. 1707-1715.
2. Piotrowsky L., Kueppers S., Jaeschke T., Pohl N. Distance Measurement Using mmWave Radar: Micron Accuracy at Medium Range // IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques. 2022. Vol. 70. No. 11. P. 5259-5270.
3. Wang H., Afzal H., Momeni O. A Highly Accurate and Sensitive mmWave Displacement-Sensing Doppler Radar With a Quadrature-Less Edge-Driven Phase Demodulator // IEEE Journal of Solid-State Circuits. 2023. DOI: 10.1109/JSSC.2023.3266704.
4. Бельский В.М., Михайлов А.Л., Родионов А.В., Седов А.А. Микроволновая диагностика ударно-волновых и детонационных процессов // Физика горения и взрыва. 2011. Т. 47. № 6. С. 29-41.
5. Канаков В.А., Лупов С.Ю., Орехов Ю.И., Родионов А.В. Методы извлечения информации о перемещении границ раздела в газодинамических экспериментах с использованием радиоинтерферометров миллиметрового диапазона // Изв. Вузов. Радиофизика. 2008. Т.51. №3. С. 234-246.
6. Левин Б.Р. Теоретические основы статистической радиотехники. 3-е изд., перераб. и доп. М.: Радио и связь, 1989. 656 с.
7. Деменко П.В. Установка для динамических испытаний структурно- неоднородных материалов на основе разрезного стержня Гопкинсона диаметром 60 мм // Проблемы прочности и пластичности. 2001. № 63. С. 186-190.
8. Кольский Г. Волны напряжения в твердых телах. М.: Издательство иностранной литературы, 1955. 192 с.

ЦЕПИ ПОДКОВ СМЕЙЛА И ИСТИННАЯ СЛОЖНОСТЬ АТТРАКТОРА С ДВОЙНОЙ СПИРАЛЬЮ[1*]

Н.В. Барабаш[1,2], В.Н. Белых[1,2], И.В. Белых[3]

[1]Нижегородский госуниверситет им. Н.И. Лобачевского,
[2]Волжский государственный университет водного транспорта
[3]Университет штата Джорджия, США

Аттрактор с двойной спиралью (double scroll) является одним из самых популярных объектов теории динамического хаоса. Однако большинство посвящённых ему работ ограничиваются доказательством пары симметричных гомоклинических орбит седло-фокуса и численными экспериментами. В мировой литературе до сих пор отсутствуют строгие доказательства существования аттрактора с двойной спиралью, а также детальный анализ его структуры. В этой работе приведены такие доказательства, а также показано, что сложность аттрактора определена появлением в его структуре новых объектов, названных нами цепями подков Смейла.

Ключевые слова: динамическая система, аттрактор, хаос, гомоклиническая орбита, цепь подков Смейла

1. Введение

Аттрактор с двойной спиралью, геометрически напоминающий восьмёрку, численно наблюдался в большом количестве конкретных динамических систем, имеющих седлофокус с парой симметричных гомоклинических орбит. Самым знаменитым примером является модель Чуа, описывающая хаотические колебания в электрической цепи [1, 2]. Несмотря на большое внимание к семейству систем с таким аттрактором, в мировой литературе до сих пор отсутствуют строгие утверждения о его существовании, структуре и бифуркациях. Авторы многих работ ограничиваются лишь качественно-численным доказательством существования гомоклинических орбит седлофокуса и численным исследованием аттрактора даже в случае кусочно-линейных систем.

В этой работе нам удалось преодолеть существующие трудности благодаря построению кусочно-линейной динамической системы, которая с одной стороны наделена всеми основными свойствами нелинейных систем с двойной спиралью, а с другой – допускает построение отображения последования Пуанкаре в явном виде. Это новое отображение, содержащее классическое отображение седло-фокуса как составную часть, позволило нам решить задачи о существовании, структуре и нелокальных бифуркациях аттрактора с двойной спиралью.

Центральное принципиально новое утверждение работы состоит в том, что существенная сложность аттрактора типа двойной спирали связана с наличием цепей из подков Смейла конечного и бесконечного периодов. Орбиты аттрактора, заданные такими цепями, составляют как гиперболические, так и эллиптические множества с исчезающе малыми бассейнами притяжения, что делает их скрытыми, т.е. принципиально ненаблюдаемыми в численном эксперименте. Особенность длиннопериодных цепей такова, что часть из них локализована около гомоклинических орбит седлофокуса, а другая часть удаляется от них на большие расстояния, широко блуждая по фазовому пространству. Бифуркации этих множеств определяют образование окон устойчивости и изменение в структуре квазистранных аттракторов. Таким образом, нами показано, что аттрактор с двойной спиралью обладает намного более сложной структурой, чем считалось ранее.

Эта работа освещает ключевую часть нашей статьи [3] о структуре аттракторов с двойной спиралью и является продолжением ряда наших работ [4–6] по кусочно-линейной реконструк-

[1*] Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (проект № 0729-2020-0036).

ции и строгому анализу аттракторов лоренцевского типа. Предложенный метод позволяет перейти от задачи о свойствах трёхмерной динамической системы к изучению нелинейного двумерного (и даже одномерного) отображения последования Пуанкаре, полученного в явном виде по траекториям исходной системы.

2. Кусочно-линейная динамическая система с двойной спиралью

Трёхмерная кусочно-линейная система ОДУ, составленная из линейных подсистем A_0, A_l и A_r имеет вид

$$\begin{array}{lll} & \dot{x} = x, & \\ A_0: & \dot{y} - \nu y + \omega z, & \text{при } (x,y,z) \in G_0 \\ & \dot{z} = -\omega y - \nu z, & \\ & & \\ & \dot{x} = -\alpha(x+h) - \Omega(z+1), & \\ A_l: & \dot{y} = -\beta y, & \text{при } (x,y,z) \in G_l \\ & \dot{z} = \Omega(x+h) - \alpha(z+1), & \\ & & \\ & \dot{x} = -\alpha(x-h) - \Omega(z-1), & \\ A_r: & \dot{y} = -\beta y, & \text{при } (x,y,z) \in G_r \\ & \dot{z} = \Omega(x-h) - \alpha(z-1), & \end{array} \quad (1)$$

где h, α, β, ν, ω и Ω – положительные параметры, а области G_0, G_l и G_r для некоторого параметра $r > 1$ заданы следующим образом

$$\begin{array}{ll} G_0: & |x| < h, (y^2 + z^2 \le r^2) \cap (|z| < 1), \\ & \\ G_l: & (z \le -sign\, x, y \in \mathbb{R}^1) \setminus G_0, \\ & \\ G_r: & (z \ge -sign\, x, y \in \mathbb{R}^1) \setminus G_0. \end{array} \quad (2)$$

Существует область параметров (см. Теорему 2 в [3]), для которой два прямоугольника $D = D_l \cup D_r$, где $D_{l,r} = \{|x| < h, y^2 + 1 \le r^2, z = \mp 1\}$, являются глобальной секущей для любого аттрактора системы (1). Используя решения линейных подсистем в (1), получим отображение T секущей D в себя в явном виде

$$\begin{array}{ll} & \bar{x} = \mu sign\, x + (1-\mu)|x|^{\nu}(y \sin \omega\, ln|x| + z \cos \omega\, ln|x|\,), \\ T: & \bar{y} = q|x|^{\nu}(y \cos \omega\, ln|x| - z \sin \omega\, ln|x|\,), \\ & \\ & \bar{z} = sign\, x, \end{array} \quad (3)$$

где $\frac{x}{h} \to x$, $\mu = 1 - \frac{1}{h} e^{-\frac{3\pi\alpha}{2\Omega}}$, $q = e^{-\frac{3\pi\beta}{2\Omega}}$. Проведённый в работе [3] анализ отображения (3) приводит к утверждениям о существовании в системе (1) аттрактора типа двойной спирали (Теорема 3 в [3]), а также о наличие в нём хаотической компоненты, определяемой подковами Смейла (Теорема 4 в [3]). Исследование отображения (3) привело к введению понятия цепей подков Смейла и к утверждению об их существенной роли в формировании структуры аттрактора. Рассмотрим здесь этот принципиально новый результат.

2. Цепи подков Смейла и истинная сложность аттрактора

Каждый из прямоугольников D_r и D_l делится пополам плоскостью $x = 0$ так, что $D_r = D_1 \cup D_2$, $D_l = D_3 \cup D_4$. Образами этих прямоугольников являются 4 спирали TD_j, $j = \overline{(1,4)}$. Ограничимся случаем $\mu = 0$ (случай двух симметричных гомоклинических петель седло-фокуса). Тогда каждая из 4 спиралей разбивается плоскостью $x = 0$ на бесконечное число подков (половин

витка спирали), которые будем обозначать H_{ij}^n, таких, что $H_{ij} = \bigcup_{n=0}^{\infty} H_{ij}^n$, где $H_{ij} = TD_i \cap D_j$, $i,j = \overline{(1,4)}$. Каждая подкова имеет прообраз $\sigma_{ij}^n = T^{-1} H_{ij}^n$ (см. рис. 1). В работе [3] (Теорема 4) приведено условие существования бесконечного числа классических подков Смейла $H_{11}^n \cap \sigma_{11}^n$ и $H_{44}^n \cap \sigma_{44}^n$.

Теперь рассмотрим прообраз $\sigma_{32}^1 \in D_3$, который трансверсально отображается в подкову $H_{32}^1 \in D_2$. Эта подкова пересекает прообраз $\sigma_{23}^1 \in D_2$, образ которой в свою очередь трансверсально пересекает прообраз σ_{32}^1. Этот объект в работе [3] нами был назван гиперболической подковой Смейла периода 2 и получил обозначение $Sh_2^1 = \sigma_{32}^1 \to \sigma_{23}^1 \to \sigma_{32}^1$ (см. рис. 2). Такая подкова порождает неблуждающее гиперболическое множество, лежащее в пересечении $(\sigma_{32}^1 \cap H_{23}^1) \cup (\sigma_{23}^1 \cap H_{32}^1)$ и топологически сопряжённое со сдвигом Бернулли из 4 символов. Нами доказано существование области параметров отображения (3), для которой оно имеет бесконечное количество подков Смейла периода 2 $Sh_2^n = \sigma_{32}^n \to \sigma_{23}^n \to \sigma_{32}^n$, $n = \overline{n_0,\infty}$, $n_0 = \text{const}$ (Теорема 5 в [3]).

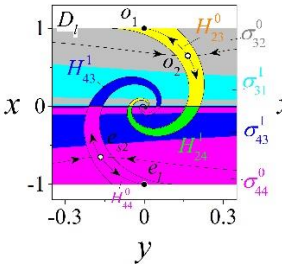
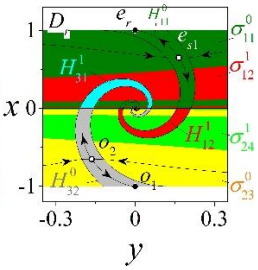


Рис. 1



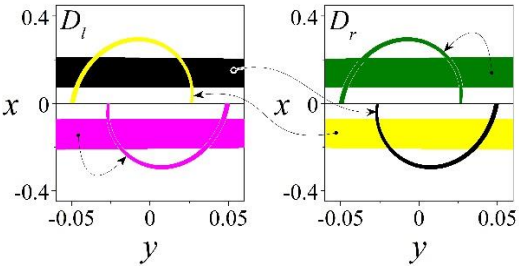


Рис. 2

Наиболее сильный результат состоит в доказательстве существования гиперболических подков Смейла произвольного периода p, включая $p \to \infty$, состоящих из цепей любых прообразов (Теорема 6 [3]). В частности, доказано, что при $\nu < \frac{1}{4}$ каждый прообраз σ_{11}^n, $n = \overline{1,\infty}$, имеет трансверсальное пересечение с подковой H_{11}^{n+1}, что означает существование цепей подков Смейла бесконечного периода Sh_{∞}^{mix}, порождающих гиперболическое неблуждающее множество, сопряжённое с алфавитом из бесконечного числа символов (см. рис 3).

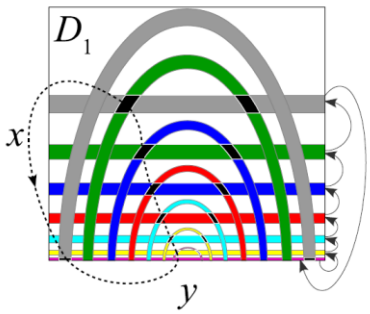


Рис. 3

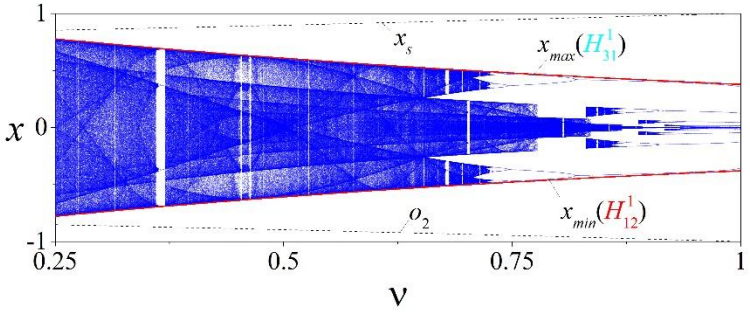


Рис. 4

Такие цепи подков Смейла, порождающие как гиперболическое, так и эллиптическое неблуждающие множества, «заполняют» 4 спирали TD_i, $i = \overline{1,4}$, содержащие максимальный аттрактор, тем самым определяя его невероятно сложную структуру (см. расширенную бифуркационную диаграмму на рис. 4).

Литература

1. Chua L.O., Komuro M., Matsumoto T. The Double Scroll Family // IEEE Transactions on Circuits & Systems. 1986. Vol. CAS-33, No. 11. P. 1073–1118. DOI: 10.1109/TCS.1986.1085869.
2. Belykh V.N., Chua L.O. New type of strange attractor from a geometric model of Chua's circuit // International Journal of Bifurcation and Chaos. 1992. Vol. 2, No. 3. P. 697–704. DOI: 10.1142/S021812749200080X.
3. Belykh V.N., Barabash N.V., Belykh I.V. The hidden complexity of a double-scroll attractor: Analytic proofs from a piecewise-smooth system // Chaos. 2023. Vol. 33, No. 4. P. 043119. DOI: 10.1063/5.0139064.
4. Belykh V.N., Barabash N.V., Belykh I.V. A Lorenz-type attractor in a piecewise-smooth system: Rigorous results // Chaos. 2019. Vol. 29, No. 10. P. 103108. DOI: 10.1063/1.5115789.
5. Белых В.Н., Барабаш Н.В., Белых И.В. Бифуркации хаотических аттракторов в кусочно-гладкой системе лоренцевского типа // Автомат. и телемех. 2020. № 8. С. 13. DOI: 10.31857/S0005231020080036
6. Belykh V.N., Barabash N.V., Belykh I.V. The hidden complexity of a double-scroll attractor: Analytic proofs from a piecewise-smooth system // Chaos. 2021. Vol. 31, No. 4. P. 043117. DOI: 10.1063/5.0044731.

ОБОБЩЁННОЕ H_2 УПРАВЛЕНИЕ ЛИНЕЙНОЙ ДЕСКРИПТОРНОЙ СИСТЕМОЙ НЕПРЕРЫВНОГО ВРЕМЕНИ[1*]

Р.С. Бирюков, Е.С. Бубнова

Нижегородский госуниверситет им. Н.И. Лобачевского

Рассматривается линейная дескрипторная система непрерывного времени на конечном горизонте при допустимых начальных условиях и возмущении ограниченной энергии, т.е. ограниченной $\boldsymbol{L_2}$-нормы. Вводится понятие обобщённой $\boldsymbol{\mathcal{H}_2}$-нормы как нормы линейного оператора, порождённого этой системой. Приводится метод вычисления обобщённой $\boldsymbol{\mathcal{H}_2}$-нормы с помощью решения дифференциального проекционного уравнения Ляпунова. Построено оптимальное обобщённое $\boldsymbol{\mathcal{H}_2}$ управление в виде линейной обратной связи по состоянию системы.

Ключевые слова: дескрипторная система, обобщённая $\boldsymbol{\mathcal{H}_2}$-норма, проекционное уравнение Ляпунова.

1. Введение

Для оценки качества функционирования систем наряду с такими характеристиками как $\mathcal{H}_2$-норма, $\mathcal{H}_\infty$-норма и анизотропийная норма, существует также обобщённая $\mathcal{H}_2$-норма, впервые введённая Уилсоном для непрерывных систем в работе [1]. Данная норма позволяет оценить максимальные возможные уклонения целевого выхода по отношению к возмущениям, действующим на систему, то есть представляет собой L_∞/L_2 норму оператора, порождённого системой. Другой отличительной особенностью обобщённой $\mathcal{H}_2$-нормы, если сравнивать её с $\mathcal{H}_\infty$- и анизотропийной нормами, является простота её вычисления. Кроме этого, в [2] было показано, что задачи многокритериального управления, когда в качестве целевых функционалов выступают обобщённые $\mathcal{H}_2$-нормы, могут быть эффективно, с вычислительной точки зрения, решены с использованием аппарата линейных матричных неравенств. Таким образом, распространение обобщённой $\mathcal{H}_2$-нормы на иные классы систем является востребованным с точки зрения решения прикладных задач.

В [3] рассматривается обобщённая $\mathcal{H}_2$-норма для линейных непрерывных нестационарных систем на конечном горизонте при ненулевых начальных условиях и решается задача синтеза оптимального управления минимизирующего данную характеристику. В [4] обобщённая $\mathcal{H}_2$-норма рассматривается для линейных дискретных стационарных дескрипторных систем. В настоящей работе понятие обобщённой $\mathcal{H}_2$-нормы распространяется на линейные дескрипторные системы непрерывного времени. Приводится способ вычисления обобщённой $\mathcal{H}_2$-нормы таких систем с использованием дифференциальных проекционных уравнений Ляпунова [5]. Показывается, что оптимальное управление, минимизирующее обобщённую $\mathcal{H}_2$-норму замкнутой системы, может быть найдено как решение задачи полуопределённого программирования.

2. Обобщённая $\mathcal{H}_2$ норма дескрипторной системы

Рассмотрим непрерывную линейную дескрипторную систему, динамика которой описывается уравнениями

$$\begin{aligned} E\dot{x} &= Ax + Bv, \quad x(t_s) = x_0, \\ z &= Cx, \end{aligned} \tag{1}$$

[1*] Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (проект FSWR-2023-0034) и научно-образовательного математического центра «Математика технологий будущего».

здесь $x \in \mathbb{R}^{n_x}$ – состояние объекта, $v(t) \in L_2([t_s, t_f], \mathbb{R}^{n_v})$ – внешнее возмущение, $z \in \mathbb{R}^{n_z}$ – целевой выход. Будем считать, что пара матриц (E, A) является регулярной, т.е. существует постоянная $\alpha \in \mathbb{C}$, для которой $\det(\alpha E - A) \neq 0$. В этом случае систему (1) можно представить в канонической форме Вейерштрасса [5, 6], что означает существование невырожденных матриц W и T таких, что:

$$E = W \begin{bmatrix} I_{n_f} & 0 \\ 0 & N \end{bmatrix} T, \qquad A = W \begin{bmatrix} J & 0 \\ 0 & I_{n_\infty} \end{bmatrix} T,$$

здесь I_m – единичная матрица порядка m, J и N – жордановы матрицы, N – нильпотентная матрица индекса ν, т.е. $N^\nu = 0$, а $N^s \neq 0$, $s = 1, \dots, \nu - 1$, n_f и n_∞ – размерности подпространств, являющихся линейными оболочками собственных векторов, отвечающих конечным и бесконечным собственным числам соответственно. Представим матрицы B и C системы (1) следующим образом:

$$B = W \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}, \qquad C = [C_1 \quad C_2] T, \tag{2}$$

где разбиение на блоки соответствует разбиению матриц E и A, и сделаем замену переменных $\xi = Tx$, $\xi = \mathrm{column}(\xi_1, \xi_2)$, тогда после домножения слева на матрицу W^{-1} получим декомпозицию системы (1):

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_1 &= J\xi_1 + B_1 v, \\ N\dot{\xi}_2 &= \xi_2 + B_2 v, \\ z &= C_1\xi_1 + C_2\xi_2. \end{aligned} \tag{3}$$

Отметим, что соответствующая ξ_1 подсистема называется медленной, а подсистема, соответствующая ξ_2, – быстрой.

Определение 1. Назовём систему (1) безымпульсной относительно выхода, если

$$C_2 N^k B_2 = 0, \qquad k = 0, \dots, \nu - 1. \tag{4}$$

Заметим, что данное условие отличается от условия безымпульсности ($N = 0$) [7].

Для дальнейшего изложения нам также потребуются левый P_l и правый P_r проекторы на подпространство матричного пучка $(\lambda E - A)$, соответствующее конечным собственным значениям:

$$P_l = W \begin{bmatrix} I_{n_f} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} W^{-1}, \qquad P_r = T^{-1} \begin{bmatrix} I_{n_f} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} T.$$

Также будем считать, что начальные условия x_0 системы (1) являются допустимыми, т.е. принадлежат следующему множеству:

$$x_0 \in \chi_0 = \left\{ T^{-1} \begin{bmatrix} \xi_0^1 \\ 0 \end{bmatrix} : \xi_0^1 \in \mathbb{R}^{n_f} \right\}. \tag{5}$$

Система (1) порождает линейный оператор, отображающий начальные условия и внешние возмущения в целевой выход:

$$S: (x_0, v) \mapsto z.$$

Определим обобщённую $\mathcal{H}_2$-норму системы (1) как норму линейного оператора S:

$$\gamma^2 = \sup_{v \neq 0} \frac{\sup\limits_{t \in [t_s, t_f]} |z(t)|_2^2}{\|v\|_{L_2}^2 + x_0^T R x_0}, \tag{6}$$

где R – весовая матрица, отражающая относительную важность учёта неопределённостей начальных условий и внешнего возмущения. Будем полагать, что данная матрица удовлетворяет условиям $R = P_r^T R P_r = R^T \geq 0$, $\mathrm{rank}(R) = n_f$, что позволяет учитывать неопределённость проекции начального состояния на собственное подпространство, отвечающее конечным собственным значениям.

Теорема 1. Обобщённая $\mathcal{H}_2$-норма линейной дескрипторной стационарной системы на конечном горизонте при допустимых начальных условиях (1) может быть вычислена как

$$\gamma = \sup_{t \in [t_s, t_f]} \lambda_{max}^{1/2}(CY(t)C^T), \tag{7}$$

где $Y = Y^T \geq 0$ – решение проекционного дифференциального уравнения Ляпунова

$$E\dot{Y}E^T = AYE^T + EYA^T + P_l B B^T P_l^T, \qquad Y = P_r Y \tag{8}$$

с начальными условиями, удовлетворяющими уравнению $RY(t_s)R = R$.

Замечание 1. Условие безымпульсности относительно выхода приводит к тому, что обобщённая $\mathcal{H}_2$-норма дескрипторной системы (1) совпадает с обобщённой $\mathcal{H}_2$-нормой медленной подсистемы.

3. Оптимальное обобщённое $\mathcal{H}_2$ управление

Далее рассмотрим управляемую дескрипторную систему

$$\begin{aligned} E\dot{x} &= Ax + Bv + B_u u, \qquad x(t_s) = x_0, \\ z &= Cx + Du, \end{aligned} \tag{9}$$

где u — управление. Поставим задачу синтеза оптимального управления в форме линейной обратной нестационарной связи $u = \Theta(t)x$, минимизирующего обобщённую $\mathcal{H}_2$-норму системы (9), замкнутой управлением u.

Теорема 2. Матрица обратной связи оптимального обобщённого $\mathcal{H}_2$ управления может быть найдена как решение следующей системы уравнений:

$$\Theta Y = Z, \qquad \Theta(I - P_r) = 0, \tag{10}$$

где $Y(t) = Y^T \geq 0$, $Z(t)$ — решение задачи полуопределённого программирования

$$\begin{aligned} &\inf \gamma^2 \\ &E\dot{Y}E^T = AYE^T + EYA^T + B_u ZE^T + EZ^T B_u^T + P_l BB^T P_l^T, \quad RY(t_s)R = R, \\ &Y = P_r Y, \qquad \begin{bmatrix} Y & YC^T + Z^T D^T \\ CY + DZ & \gamma^2 I \end{bmatrix} \geq 0, \quad \forall t \in [t_s, t_f]. \\ &Z = ZP_r^T, \end{aligned} \tag{11}$$

Отметим, что $\operatorname{rank} Y = n_f$, $\operatorname{rank} Z \leq n_f$, $\operatorname{rank}(I - P_r) = n_\infty$, поэтому линейная система $\Theta[Y, I - P_r] = [Z, 0]$ имеет единственное решение.

Для вычисления искомых параметров обратной связи проведём дискретизацию условий (11). Введём на отрезке $[t_s, t_f]$ равномерную сетку $t_{k+1} = t_k + h$, где $h = (t_f - t_s)/N$, и запишем дискретный аналог рассматриваемой задачи:

$$\begin{aligned} &E(Y_{k+1} - Y_k)E^T = h(AY_k E^T + EY_k A^T + B_u Z_k E^T + EZ_k^T B_u^T + P_l BB^T P_l^T), \\ &\begin{bmatrix} Y_k & Y_k C^T + Z_k^T D^T \\ CY_k + DZ_k & \gamma^2 I \end{bmatrix} \geq 0, \qquad Y_k = P_r Y_k, \qquad Z_k = Z_k P_r^T, \qquad RY_0 R = R. \end{aligned} \tag{12}$$

где индекс k указывает на значение в момент времени t_k, т.е. $Y(t_k) = Y_k$.

4. Заключение

Для линейных непрерывных дескрипторных систем на конечном горизонте вводится понятие обобщённой $\mathcal{H}_2$-нормы и приводится алгоритм её вычисления, основанный на решении дифференциального проекционного уравнения Ляпунова. Построено оптимальное обобщённое $\mathcal{H}_2$ управление в виде линейной обратной связи по состоянию системы. Показано, что матрица обратной связи может быть найдена как решение задачи полуопределённого программирования.

Литература

1. Wilson D.A. Convolution and Hankel Operator Norms for Linear Systems // IEEE Trans. Autom. Control. 1989. Vol. 34. P. 94–97.
2. Баландин Д.В., Коган М.М. Оптимальное по Парето обобщенное H_2-управление и задачи виброзащиты // Автоматика и телемеханика. 2017. № 8. С. 76–90.
3. Баландин Д.В., Бирюков Р.С., Коган М.М. Оптимальное управление максимальными уклонениями выходов линейной нестационарной системы // Автоматика и телемеханика. 2019. № 10. С. 37–61.
4. Бубнова Е.С. Множества достижимости и обобщённая H_2-норма линейной дискретной дескрипторной системы // Управление большими системами. 2023. № 103. С. 78–93.
5. Stykel T. Analysis and numerical solution of generalized Lyapunov equations // Ph.D. thesis, Institut fur Mathematik, Techische Universitat Berlin, Berlin. 2002.

6. Белов А.А., Курдюков А.П. Дескрипторные системы и задачи управления. М.: Физматлит, 2015. 270 с.
7. Duan G. Analysis and design of descriptor linear systems. Springer, 2010.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ПРЯМЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ АБЕЛЕВЫХ ГРУПП БЕЗ КРУЧЕНИЯ В ЗАДАЧАХ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СТРУКТУРИРОВАННЫХ РЕСУРСОВ

Е.А. Благовещенская, И.И. Микулик, Н.В. Груздев

Петербургский государственный университет путей сообщения Императора Александра I

В работе рассмотрена возможность параллельной реализации гибридного метода оптимизации, использующего эвристики муравьиного алгоритма и генетического, для решения задачи коммивояжера. Задача коммивояжера является NP-полной задачей и часто применяется для тестирования алгоритмов комбинаторной оптимизации. В качестве исследуемого алгоритма рассматривается алгоритм простой муравьиной колонии с изменяющимися с помощью генетического алгоритма параметрами. Показано, что распараллеливание данного метода приводит к увеличению скорости выполнения работы алгоритма.

Ключевые слова: распараллеливание, задача коммивояжера, методы оптимизации, муравьиные алгоритмы, генетический алгоритм, параллельные вычисления

1. Введение

Любой производственный технологический процесс подразумевает использование ресурсной базы, составляющие компоненты которой могут иметь различную природу. В частности, это могут быть как материальные, так и информационные ресурсы, которые должны рассматриваться в определенной взаимосвязи. В ситуации частичной автоматизации к ним примыкают также кадровые ресурсы, под которыми понимаются специалисты, управляющие осуществлением и согласованием отдельно взятых цепей, являющихся частью одного общего целевого процесса. Поскольку только правильное сочетание ресурсов разного рода позволяет осуществлять действия, направленные на получение запланированного результата, возникает возможность введения структурных связей на множестве имеющихся ресурсов. При этом естественно предполагается, что в каждой логической цепи действий отсутствуют неиспользуемые в ней виды ресурсов, которые оказываются в это время задействованными в другой цепи. Таким образом, осуществляется последовательно-параллельный принцип работы, который представляется ориентированным графом ярусно-параллельной формы, при этом его подграфы, реализующие отдельные последовательности действий (операций), являются связными.

Графы требуемого вида представляют алгоритмы прямых разложений абелевых групп без кручения специального вида, так называемых, почти вполне разложимых групп, допускающих неизоморфные (различные) прямые разложения. Это соответствует практической возможности создания различных продуктов с использованием одной и той же ресурсной структурированной базы, под которой понимается совокупность ее качественных и количественных характеристик, а также связей между ресурсами различного рода. Прямые разложения указанных групп предлагаются в качестве математической модели организации процессов производства. Они также могут служить инструментом их оптимизации по различным характеристикам, к которым относятся поиски решений логистических задач.

2. Постановка задачи

Имеется k видов ресурсов A_1 , A_2 ,…, A_k в количестве n_1 , n_2 ,…, n_k соответственно (их количества даются в условных единицах, причем, различных для различных значений параметра $i = 1, \dots, k$). Вводятся инварианты m_1 , m_2 ,…, m_k, которые обозначают логические связи между ресурсами A_i и A_j следующим образом: если m_i и m_j имеют общий элемент p, то A_i и A_j имеют логическую связь типа p (i и j – различны).

Требуется получить набор продуктов r_1 , r_2 ,…, r_s, затратив максимальное допустимое количество ресурсов (то есть, ограниченное числами n_1 , n_2 ,…, n_k) в минимально возможные сроки.

Предполагается, что в создании отдельно взятого продукта используется одна условная единица количества любого необходимого ресурса. При этом, любые два используемых вида ресурсов в создании каждого продукта должны быть логически связаны (возможно, не непосредственно, а транзитивно через другие виды участвующих ресурсов). Также допускаем, что каждая операция занимает одну условную единицу времени.

3. Математическая модель

В теории прямых разложений абелевых групп без кручения конечного ранга графический подход позволил ввести структуру на множестве отдельных прямых разложений на неразложимые слагаемые и рассмотреть их в системе введенных инвариантов с точностью до так называемого «почти изоморфизма». Это в первую очередь относится к почти вполне разложимым группам с циклическим регуляторным фактором (кратко: crq-группам):

Определение. Crq-группой с регулятором $A = A_1 \oplus A_2 \oplus \ldots \oplus A_k$ называется абелева группа без кручения X, содержащая вполне разложимую группу A так, что X/A является конечной циклической группой (A_i – однородные компоненты регулятора).

Различные прямые разложения $\boldsymbol{X = X_1 \oplus X_2 \oplus \ldots \oplus X_s}$ такой группы интерпретируются как преобразования представляющего ее графа, число вершин которого равняется рангу группы $\boldsymbol{n}$, а компоненты связности символизируют неразложимые прямые слагаемые. Допустимые преобразования графа заключаются в передвижениях рёбер по определённым правилам, что приводит к различным распределениям множества вершин между компонентами связности и, значит, к различным разложениям группы на неразложимые слагаемые рангов $\boldsymbol{r_1}$, $\boldsymbol{r_2}$,…, $\boldsymbol{r_s}$.

Каждое из этих чисел равняется числу вершин соответствующей компоненты связности, то есть числу различных видов используемых ресурсов в данном продукте, а дуги символизируют связи между ними.

Возможность строить прямые разложения crq-групп с заранее заданными свойствами позволяет удовлетворить заявленные требования к созданию продукции, используя сами абелевы crq-групп как математическую модель производственной линии в независимости от природы создаваемых продуктов (материальных или информационных). При этом, графическая интерпретация процессов дает их наглядную визуализацию и возможность нахождения оптимальных по определенным параметрам решений сформулированной задачи комбинаторными или графическими методами.

Литература

1. Благовещенская Е.А., Зуев Д.В., Кузнецова И.В., Тихомиров С.А. Приложения алгоритмов прямых разложений абелевых групп без кручения к задачам распараллеливания вычислительных и конструктивных процессов // Международные Колмогоровские чтения-XIV, посвященные 100-летию профессора ЗА Скопеца. 2017. С. 38–40.
2. Hassan M. et al. An improved ACS algorithm for the solutions of larger tsp problems // arXiv preprint arXiv:1304.3763. – 2013.
3. Batmetan J. R. et al. A multiple-objective ant colony algorithm for optimizing disaster relief logistics // Advanced Science Letters. – 2017. – Т. 23. – №. 3. – С. 2344-2347.
4. Liang D. et al. An efficient ant colony system approach for new energy vehicle dispatch problem // IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems. – 2019. – Т. 21. – №. 11. – С. 4784-4797.
5. Qian X., Zhong X. Optimal individualized multimedia tourism route planning based on ant colony algorithms and large data hidden mining //Multimedia Tools and Applications. – 2019. – Т. 78. – №. 15. – С. 22099-22108.

6. Esquinas-Requena J.L. et al. La anemia aumenta el riesgo de mortalidad debido a fragilidad y discapacidad en mayores: Estudio FRADEA //Atencion primaria. – 2020. – Т. 52. – №. 7. – С. 452-461.
7. Lee Z.J. et al. Genetic algorithm with ant colony optimization (GA-ACO) for multiple sequence alignment // Applied Soft Computing. – 2008. – Т. 8. – №. 1. – С. 55-78.
8. Yan-hua Z., Lei F., Zhi Y. Optimization of cloud database route scheduling based on combination of genetic algorithm and ant colony algorithm // Procedia Engineering. – 2011. – Т. 15. – С. 3341-3345.
9. Скобцов Ю.А., Федоров Е.Е. Метаэвристики: монография. Донецк: Издательство «Ноулидж», 2013. 426 с.

ДАТЧИК АБСОЛЮТНОЙ УГЛОВОЙ СКОРОСТИ НА ОСНОВЕ МОДУЛЯЦИОННОГО МИКРОМЕХАНИЧЕСКОГО ГИРОСКОПА

В.М. Боголюбов[1], Л.У. Бахтиева[2], О.В. Цыганов[1]

[1] Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н. Туполева,
[2] Казанский федеральный университет

На основе построенной ранее имитационной модели модуляционного микромеханического гироскопа [1] предложен алгоритм измерения абсолютной угловой скорости вращения основания прибора. Показано, что задача измерения третьей компоненты угловой скорости, совпадающей по направлению с вектором кинетического момента, сводится к получению информации о частоте возникающих колебаний биений. Разработана структурная схема модели для реализации предложенного алгоритма в среде Matlab&Simulink. Проведены численные эксперименты, сделаны практически важные выводы.

Ключевые слова: микромеханический гироскоп, измерение третьей компоненты угловой скорости, колебания биений.

1. Введение

Твердотельные микромеханические гироскопы (ММГ), используемые в современных системах управления летательными аппаратами (в частности, в малогабаритных беспилотных летательных аппаратах (БПЛА)), в большинстве своем являются однокомпонентными датчиками угловой скорости. При решении задач навигации (ориентации) подвижных объектов требуется установка на борту трех таких датчиков, измерительные оси которых должны с достаточно высокой точностью быть ориентированы относительно осей объекта, что требует соответствующих конструктивных решений и временных затрат. Кроме того, эксплуатация такой приборной компоновки в условиях температурных полей, достигающих перепада в 100^0С и более приводит к погрешностям в ориентации измерительных осей приборов, не говоря уже о решении вопроса взаимовлияния гироскопов и их электромагнитной совместимости. Поэтому разработчики датчиков первичной информации стремятся на этапе их создания совместить в одном приборе комплексный набор метрологических возможностей [2-7].

Решение этих задач в рассматриваемом классе датчиков первичной информации с учетом наработок приборостроительных предприятий можно реализовать на основе гибридных ММГ, к числу которых относится двухстепенной модуляционный ММГ, отличающийся значительно более высокой точностью, большим арсеналом метрологических возможностей и не требующий при изготовлении высокого уровня технологического обеспечения.

Настоящее исследование базируется на построенной авторами имитационной модели гироскопа гибридного типа на основе модуляционного ММГ [1]. Было отмечено, что малая масса прибора создает проблему сверхвысокой чувствительности системы съема его колебаний, что ограничивает точность определения местоположения БПЛА и, соответственно, затрудняет решение задач целеуказания. Кроме того, чувствительность ММГ к неточности изготовления упругого подвеса чувствительного элемента (ЧЭ) и отсутствие возможности его доводки приводят к значительному «нулевому смещению», компенсация которого является одной из важнейших проблем рассматриваемого класса приборов. В модели [1] для устранения «нулевого смещения» использован хорошо отработанный в роторных вибрационных гироскопах принцип модуляции первичной информации в механическом контуре и ее съема во вращающейся системе координат.

Как будет показано ниже, указанная модель позволяет без вмешательства в механический контур прибора, наделить его способностью к измерению трех компонент угловой скорости вращения основания, т.е. создать датчик абсолютной угловой скорости. Условия реализации способности прибора к определению третьей компоненты угловой скорости, совпадающей по

направлению с вектором кинетического момента гироскопа, сформулированы на основе симуляции модели [1] в среде Matlab&Simulink.

2. Постановка задачи

На рисунке 1 приведена кинематическая схема модуляционного ММГ, чувствительный элемент которого RR-типа (rotary-rotary) выполнен на основе кремния по планарной технологии. Здесь 1 – основание прибора, 2 – электропривод ротора, 3 – ротор-чувствительный элемент, 4 – торсионный подвес, 5 – элементы крепежа ротора к валу привода, 6 – датчик угла.

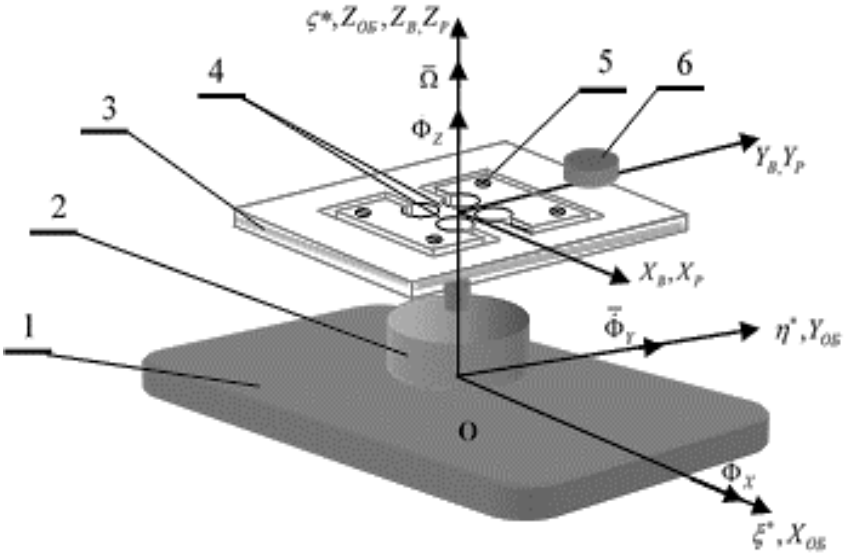


Рис. 1. Кинематическая схема модуляционного ММГ

Отметим, что в приведенной конструкции упругость подвеса ротора по оси $OY_{\text{р}}$ существенно больше упругости подвеса ротора по оси $OX_{\text{р}}$, что обеспечивает две степени свободы ротору (вращение с валом электропривода и угловые колебания вокруг оси $OX_{\text{в}}$).

Линеаризованная математическая модель модуляционного ММГ для случая движения основания прибора с постоянной угловой скоростью может быть представлена в виде [1]

$$\ddot{\theta} + 2a\dot{\theta} + {\omega_0}^2\left(1 + \frac{2\kappa\dot{\Phi}_z}{\omega_0}\right)\theta = (1+\kappa)\Omega\sqrt{\dot{\Phi}_x^2 + \dot{\Phi}_y^2}\sin(\Omega t + \psi), \qquad (1)$$

$\dot{\Phi}_x, \dot{\Phi}_y, \dot{\Phi}_z$ – проекции угловой скорости движения основания, a – коэффициент затухания колебаний ЧЭ, $\omega_0 = \sqrt{\frac{k+(C-A)\Omega^2}{B}}$ – частота собственных колебаний ЧЭ, A, B, C – соответственно экваториальные и полярный моменты инерции ЧЭ, $\Omega = \sqrt{\frac{k}{A+B-C}}$ – резонансное значение угловой скорости вращения ЧЭ, $\kappa = \frac{C-A}{B} \approx 1$ – коэффициент центробежно-маятниковой жесткости, $\psi = \text{arctg}(\dot{\Phi}_x/\dot{\Phi}_y)$.

Начальные условия для уравнения (1) имеют вид

$$\theta(0) = \dot{\theta}(0) = 0. \qquad (2)$$

Особенностью приведенной математической модели является наличие в свободном члене уравнения (1) составляющей $\frac{2\kappa\dot{\Phi}_z}{\omega_0}$, обусловленной проекцией угловой скорости вращения основания $\dot{\Phi}_z$на ось вращения ЧЭ. Кроме того, с целью исключения помехи, связанной с влиянием угловой вибрации основания с удвоенной частотой вращения ротора на точность прибора, со-

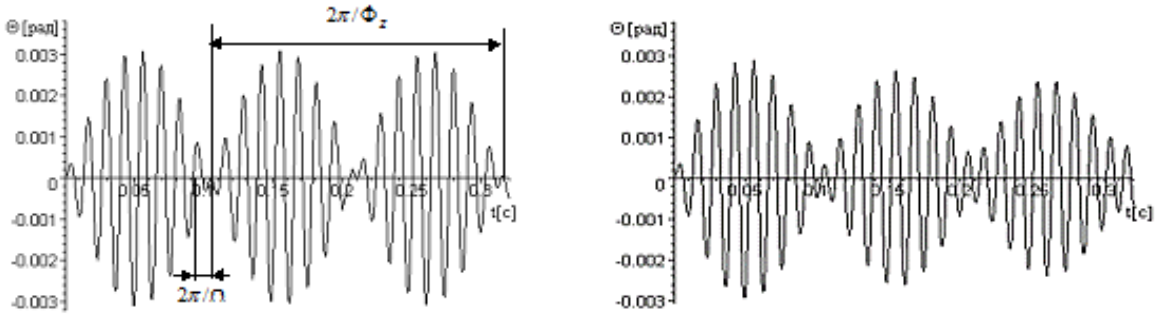
отношение его моментов инерции выбирается таким образом, чтобы коэффициент κ был близок к единице [8].

Из теории колебаний известно [9], что если на слабо демпфированную колебательную систему действует силовая функция с частотой, незначительно отличающейся от частоты ее свободных (собственных) колебаний, то наблюдаемая реакция системы на это воздействие приводит к возникновению, колебаний биений. Причем частота колебаний биений оказывается равной величине разноса частот собственных колебаний системы и силовой функции. Следовательно, измеряя величину фазового сдвига собственных колебаний системы относительно резонансного значения или величину частоты биений можно судить о близости частоты силовой функции к частоте свободных колебаний этой системы.

В [9] показано, что решение задачи (1) – (2) можно представить в следующем виде

$$\theta(t) = K_g((1-e^{-at})\dot{\Phi}_X - 2e^{-at}\dot{\Phi}_Y \sin\dot{\Phi}_z t \sin\Omega t) \\ -(1-e^{-at})\dot{\Phi}_Y + 2e^{-at}\dot{\Phi}_X \sin\dot{\Phi}_z t\cos\Omega t\,, \qquad K_g = \frac{1+\kappa}{2a}. \tag{3}$$

Формула (3) описывает движение модуляционного ММГ в случае вращения основания прибора с абсолютной угловой скоростью, оно состоит из незатухающих вынужденных колебаний, вызванных угловыми скоростями $\dot{\Phi}_X, \dot{\Phi}_Y$, и затухающих колебаний биений, созданных третьей компонентой $\dot{\Phi}_z$. Вид колебаний биений в слабо демпфированном и демпфированном гироскопе представлен на рисунках 2а и 2б.



а б

Рис. 2. Характер колебаний биений слабо демпфированного (а) и демпфированного (б) модуляционного ММГ

С учетом высокодобротных свойств модуляционного ММГ колебания биений имеют значительную продолжительность, что обеспечивает их наблюдаемость. Это обстоятельство позволяет использовать их для измерения третьей компоненты угловой скорости $\dot{\Phi}_z$ слабо демпфированным ММГ.

После демодуляции выходные напряжения демодуляторов для соответствующих измерительных каналов представимы в следующей форме

$$U_X(t) = \frac{K_g}{2}((1-e^{-at})\dot{\Phi}_X - 2e^{-at}\dot{\Phi}_Y \sin\dot{\Phi}_z t, \\ U_Y(t) = \frac{K_g}{2}((1-e^{-at})\dot{\Phi}_Y + 2e^{-at}\dot{\Phi}_X \sin\dot{\Phi}_z t. \tag{4}$$

Выражения (4) и рисунки 2 показывают, что частота биений равна модулю угловой скорости вращения основания $\dot{\Phi}_z$, направленной вдоль оси вращения ротора гироскопа. Таким образом, задача измерения третьей компоненты угловой скорости $\dot{\Phi}_z$ сводится к определению частоты колебаний биений. Ниже приводится алгоритм реализации указанного метода.

3. Измерение третьей компоненты угловой скорости

Реализация метода выделения информации о третьей компоненте $\dot{\Phi}_z$ по информации о частоте колебаний биений проводилась на основе симуляции модели (1) – (2) в среде Matlab&Simulink.

Структурная схема модели приведена на рисунке 3.

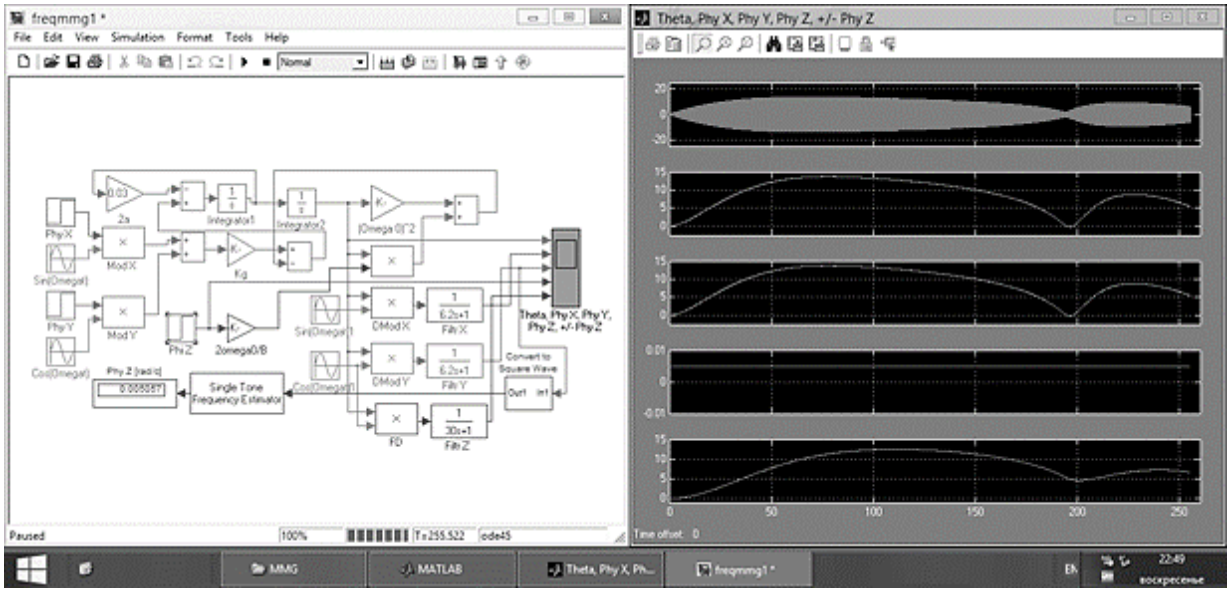


Рисунок 3. Структурная схема имитационной модели трехкомпонентного модуляционного ММГ

Входные воздействия в виде скачка проекций угловых скоростей основания *PhyX* ($\dot{\Phi}_X$) и *PhyY* ($\dot{\Phi}_Y$), задаваемых генераторами *Step*, подавались на входы модуляторов *ModX, ModY*, вторые входы которых подключались к генераторам опорных напряжений *Sin(Omegat)* и *Cos(Omegat)*, формирующим синусоидальные сигналы с частотой вращения ротора гироскопа Ω, сдвинутые по фазе на 90^0. Разделение информации о проекциях угловых скоростей основания по соответствующим измерительным осям осуществлялось демодуляторами *DModX, DModY* , а фильтрация полезного сигнала от продукта демодуляции (напряжения частоты 2Ω) осуществлялась фильтрами *FiltrX, FiltrY*. Осциллограф отображал сигналы, соответствующие амплитудно-модулированному сигналу с частотой Ω, с наложенными на них колебаниями биений (*Theta*), вызванными расстройкой ММГ входной угловой скоростью *PhyZ* ($\dot{\Phi}_Z$), и выходные демодулированные сигналы (*PhyXx, PhyYy*) соответствующих измерительных каналов.

Выделение информации о третьей компоненте $\dot{\Phi}_z$ осуществлялось сигналом с выхода фильтра *FiltrY,* который преобразовывался в начале в импульсную последовательность блоком *Convert to Square Wave* (триггер Шмитта), а далее блоком *Single Tone Frequensy Estimator* (преобразователь временного интервала в частоту) в частоту, соответствующую величине скорости $\dot{\Phi}_z$, отображаемую блоком *PhyZ* (*rad/c*) (частотомер). Информация о знаке угловой скорости $\dot{\Phi}_z$ определялась полярностью выходного сигнала фазового детектора *FD,* после фильтрации которого фильтром *FiltrZ* она отображалась на осциллографе сигналом $\pm$ *PhyZ.*

Таким образом, модель (1) – (2) дает полную информацию о модуле и направлении третьей компоненты угловой скорости $\dot{\Phi}_z$ и, следовательно, об абсолютной угловой скорости вращения основания прибора.

4. Заключение

Построенная авторами в [1] имитационная модель, а также предложенный в настоящей статье алгоритм измерения третьей угловой скорости по информации о частоте биений позволяют:

- реализовать на основе модуляционного ММГ датчик абсолютной угловой скорости;

- обеспечить сохранение резонансного режима работы прибора путем введения контура автонастройки с использованием измеренной угловой скорости Ф˙_z;
- используя принцип модуляции первичной инфор¬мации в механическом контуре и ее съема во вращающейся системе координат, устранить так называемое «нулевое смещение», свойственное обычным ММГ;
- обеспечить по третьей оси чувствительности диапазон измерений абсолютной угловой скорости, значительно превышающий диапазон измерений по двум другим осям, что позволяет применять прибор во вращающихся объектах;
- обеспечить стабильную пространственную ориентацию подвижного объекта в условиях его эксплуатации в широком диапазоне температурных полей, достигающих перепада в 1000 С и более.

Все выше перечисленные возможности могут быть реализованы без вмешательства в механический контур прибора.

Литература

1. Боголюбов В.М., Бахтиева Л.У., Цыганов О.В. Имитационная модель параметрически возбуждаемого модуляционного микромеханического гироскопа // Информационные и математические технологии в науке и управлении. 2023. № 2 (30), С. 68-74. DOI: 10.25729/ESI.2023.30.2.007.
2. Bakhtieva L., Bogolyubov V. Modulation of Damping in the Rotor Vibratory Gyroscopes // Russian Aeronautics. 2019. №. 61. P. 599-604. DOI: 10.3103/S1068799818040141.
3. Bogolyubov V., Bakhtieva L. Astatic Gyrocompass Based on a Hybrid Micromechanical Gyroscope // IEEE East-West Design and Test Symposium (EWDTS). 2021. P. 1-5. DOI: 10.1109/EWDTS52692.2021.9580982.
4. Bakhtieva L., Bogolyubov V., Tumakov M. Simulation of a multifunctional micromechanical gyroscope // Program Systems: Theory and Applications. 2022. Vol. 13. № 3 (54), 3. 17-27. DOI: 10.25209/2079-3316-2022-13-3-17-27.
5. Коновалов С.Ф., Пономарев Ю.А., Майоров Д.В. Гибридные микроэлектромеханические гироскопы и акселерометры // Научное издание МГТУ им. Н.Э. Баумана. 2011. № 10. С. 1-23.
6. Матвеев В.В., Распопов В.Я. Приборы и системы ориентации, стабилизации и навигации на МЭМС датчиках // XXIV санкт-петербургская международная конференция по интегрированным навигационным си¬стемам. 2017. № 24. С. 264-266.
7. Лукьянов Д.П., Распопов В.Я., Филатов Ю.В. Прикладная теория гироскопов: учебник для вузов. 2015. 315 с.
8. Суханов Б.Н. О повышении точности двумерного одноканального измерителя угловых скоростей. В кн. Прикладная гироскопия. Под ред. В.А. Павлова. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1974. 206 с.
9. Тимошенко С.П., Янг Д.Х., Уивер У. Колебания в инженерном деле. М.: Машиностроение, 1985. 472 с.

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕХНОЛОГИЙ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ПЕРКОЛЯЦИОННОЙ ЗАДАЧИ *K*-МЕРОВ В КОНТИНУУМЕ

М.М. Бузмакова, П.Д. Пучинина, С.В. Русаков

Пермский государственный национальный исследовательский университет

Решение перколяционной задачи состоит из этапов постановки задачи, разработки алгоритмов, программной реализации, проведения численного эксперимента и анализа результатов. На этапе разработки алгоритмов крайне важна их эффективность, так как перколяционные системы достаточно сложны, и порой вычислительный эксперимент занимает не один месяц расчетов. В рамках данной работы автором произведено использование параллельных вычислений для перколяционной задачи *k*-меров на плоскости. Были произведены расчеты с использованием последовательных и параллельных вычислений для разных значений длины *k*-мера. При заданных входных параметрах модели проведение численного эксперимента ускорилось в среднем приблизительно в 3 раза для минимальных длин *k* и в 7 раз для максимальных.

Ключевые слова: параллельные вычисления, математическое и компьютерное моделирование, теория перколяции, континуум, *k*-меры

1. Введение

Теория перколяции с недавнего времени активно развивается, и с каждым годом ее методы все чаще и чаще используются для исследования задач из разных областей наук [1]. С помощью перколяционных моделей можно исследовать структуры различных материалов, процессы структурообразования, фазовые переходы и многое другое [смотреть например, 2-6].

Теория перколяции развивается в трех основных направлениях: исследование новых перкляционных моделей, практическое применение перколяционных моделей для исследования различных задач и разработка эффективных алгоритмов для реализации перколяционных моделей, в том числе с применением параллельных вычислений.

Решение любой перколяционной задачи включает в себя этапы постановки задачи с описанием входных и выходных параметров модели; разработки алгоритмов заполнения перколяционной системы объектами, распределения объектов по кластерам, поиска перколяционного кластера и подсчета других характеристик; программной реализации разработанных алгоритмов и отладка программы; проведения численного эксперимента по определению порога перколяции и прочих характеристик модели; анализа полученных результатов компьютерного эксперимента. Численный эксперимент состоит в проведении множества статистических испытаний для нескольких конечных размеров перколяционной системы (минимум трех) с целью определения порога перколяции для бесконечного случая. При увеличении количества испытаний и/или размера перколяционной системы время эксперимента значительно растет. В связи с этим, актуальным является ускорение работы алгоритмов с применением параллельных вычислений.

В настоящей работе предложена параллельная реализация алгоритмов решения перколяционной задачи *k*-меров на континуальной плоскости.

2. Постановка задачи и методы исследования

Предложена континуальная модель перколяционной системы равномерно распределенных линейных *k*-меров на плоскости. Линейные *k*-меры – отрезки фиксированной длины. В модели *k*-меры не могут пересекаться и должны удовлетворять периодическим граничным условиям. Математически модель может быть описана так:

$$M = <L, k, N, K, R\{x_i, y_i\}, d_i>, \; i = 1,2,\ldots, N. \qquad (1)$$

В модели L – размер области, k – фиксированная длина k-мера, N – кол-во k-меров, K – количество тестов (итераций программы с одинаковыми исходными данными), x_i – координата начала k-мера по оси x, y_i – координата начала k-мера по оси y, d_i – ориентация k-мера.

Для компьютерной реализации математической модели перколяционной системы k-меров на плоскости была разработана программа в среде Microsoft Visual Studio на языке программирования C++. Были разработаны и реализованы алгоритмы упаковки k-меров на плоскости (результат работы алгоритма для одного испытания представлен на рисунке 1), дискретизации континуальной системы (результат работы алгоритма для одного испытания представлен на рисунке 2), Хошена-Копельмана для распределения k-меров по кластерам [7] (результат работы алгоритма для одного испытания представлен на рисунке 3), поиска перколяционного кластера. Алгоритм Хошена-Копельмана был модифицирован, Модификация алгоритма состоит в том, что при разбиении на кластеры, для очередной ячейки проверяются соседи не только слева и сверху, а еще и по диагонали, чтобы были учтены все k-меры (поскольку они произвольной ориентации).

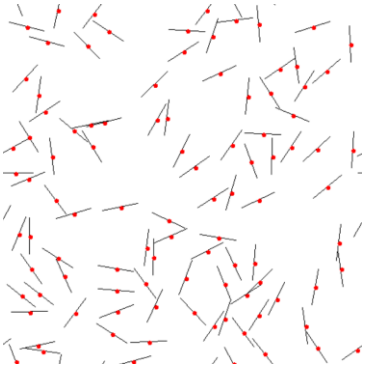


Рис. 1. Результат работы алгоритма упаковки k-меров на плоскости для одного испытания

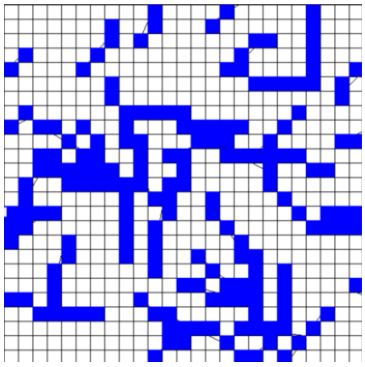


Рис. 2. Результат работы алгоритма дискретизации континуальной системы для одного испытания

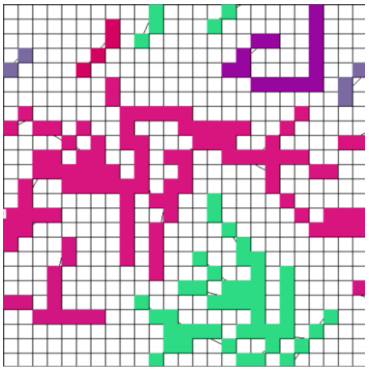


Рис. 3. Результат работы модифицированного алгоритма Хошена-Копельмана для распределения k-меров по кластерам для одного испытания

Паралельная реализация алгоритмов заключалась в том, что все испытания выполнялись параллельно на нескольких потоках. Так как для каждого испытания строится новая случайная конфигурация, проблем с синхронизацией исходных данных не возникает. На одном из потоков собираются данные, сколько раз возник перколяционный кластер.

3. Результаты моделирования и их анализ

Был проведен численный эксперимент по оценке времени работы программы для разных наборов входных параметров модели: L = 10000; k = 10, 50, 100, 150; N = 100, 500, 1000, 1500; K = 100. Программы были запущены в последовательном и параллельном вариантах, в параллельной версии было задействовано 5 потоков. Результаты оценки времени работы последовательной и параллельной версии программы представлены в суммарном виде по всем испытаниям. Алгоритм ускорился в среднем приблизительно в 3 раза для минимальных рассмотренных длин k-мера и в 7 раз для максимальных рассмотренных длин k-мера (определяется конкретным примером). Результаты можно увидеть на рисунках 4-7 ниже. Оранжевым цветом обозначены столбики оценки времени работы последовательной программы, серым цветом – параллельной на 5 потоках.

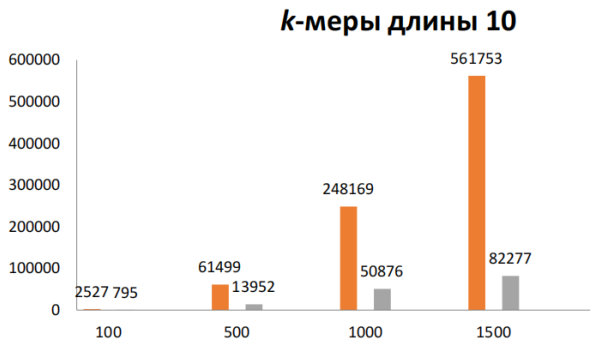


Рис. 4. Время работы последовательной и параллельной версии программы для $k = 10$

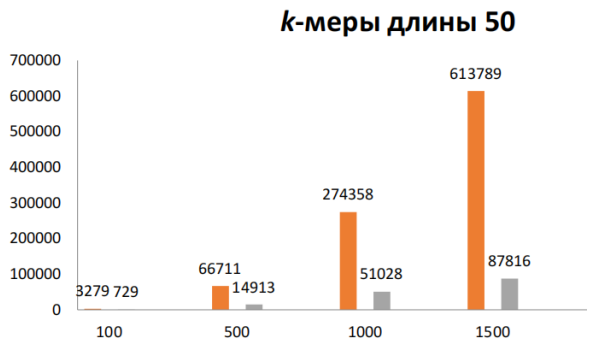


Рис. 5. Время работы последовательной и параллельной версии программы для $k = 50$

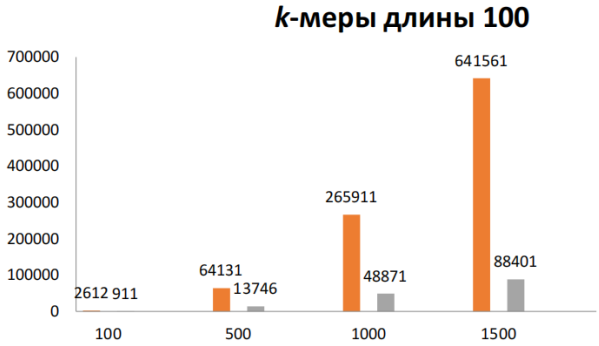


Рис. 6. Время работы последовательной и параллельной версии программы для $k = 100$

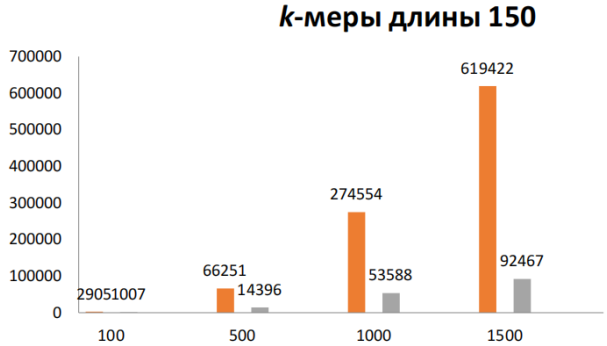


Рис. 7. Время работы последовательной и параллельной версии программы для $k = 150$

Полученные результаты по ускорению времени работы программы позволят проводить численный эксперимент по определению порога перколяции k-меров в континуальной плоскости и вывить зависимость значения порога перколяции от длины k-мера.

4. Заключение

В настоящей работе предложена параллельная реализация алгоритмов решения перколяционной задачи k-меров на континуальной плоскости. Паралельная реализация алгоритмов заключалась в том, что все испытания выполнялись параллельно на нескольких потоках. Программы были запущены в последовательном и параллельном вариантах, в параллельной версии было задействовано 5 потоков. Было достигнуто ускорение работы программы в среднем приблизительно в 3 раза для минимальных рассмотренных длин k-мера и в 7 раз для максимальных рассмотренных длин k-мера, что можно считать хорошим результатом.

Литература

1. Stauffer D. and Aharony A. Introduction to Percolation Theory. London: Taylor & Francis, 1992. 181 p.
2. Navid Sarikhani, Zohreh S. Arabshahi, Abbas Ali Saberi, and Alireza Z. Moshfegh. Unified Modeling and Experimental Realization of Electrical and Thermal Percolation in Polymer Composites. Applied Physics Reviews 9, 041403 (2022). DOI:10.48550/arXiv.2209.07635. https://www.researchgate.net/publication/363651665_Unified_Modeling_and_Experimental_Realization_of_Electrical_and_Thermal_Percolation_in_Polymer_Composites (дата обращения: 15.09.2023).
3. Julia Syurik, Natalya Alyabyeva, Alexander Alekseev, Oleg A. Ageev. AFM-based model of percolation in graphene-based polymer nanocomposites // Composites Science and Technology.

2014. 95. 38-43. https://www.ntmdt-si.com/data/media/files/publications/2014/CST_2014.pdf (дата обращения: 15.09.2023).
4. Miyazima, Sasuke. (2015). Percolation. Forma. 10.5047/forma.2015.s004. https://www.jstage.jst.go.jp/article/forma/30/2/30_S17/_article/-char/en (дата обращения: 15.09.2023).
5. Abbas Ali Saberi Recent advances in percolation theory and its applications. 2015. https://arxiv.org/pdf/1504.02898.pdf (дата обращения: 15.09.2023).
6. Кадет В.В., Галечян А.М. Перколяционная модель гистерезиса относительных фазовых проницаемостей // прикладная механика и техническая физика. 2013. Т. 54, № 3. С. 95-105. https://www.sibran.ru/upload/iblock/149/149d2e8610d514c77eca90191566c722.pdf?ysclid=lnrsmyjfx6110586495 (дата обращения: 15.09.2023).
7. Hoshen J., Kopelman R. Percolation and cluster distribution. I. Cluster multiple labeling technique and critical concentration algorithm // Phys. Rev. 1976. P. 3438 – 445.

РЕАЛИЗАЦИЯ АЛГОРИТМА ГИБРИДНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ ДЛЯ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ УСПЕВАЕМОСТИ СТУДЕНТОВ ВУЗА

Д.А. Волков, Е.А. Каледина, О.Е. Каледин

Мордовский государственный университет им. Н.П. Огарева

В работе реализован алгоритм гибридной фильтрации, позволяющий осуществить прогноз академической успеваемости студентов вуза. Алгоритм, объединяющий коллаборативную и контентную фильтрации, учитывает успеваемость «схожих» групп студентов и предпочтения конкретного обучающегося и рекомендует дисциплины из дальнейшей части учебного плана. В работе использованы методы интеллектуального анализа числовых и текстовых данных. Предложенный алгоритм может с достаточной точностью рекомендовать дисциплины для индивидуальной образовательной траектории, по которым студент будет успешен.

Ключевые слова: рекомендательная система, индивидуальная образовательная траектория, коллаборативная фильтрация, гибридная фильтрация.

1. Введение

Индивидуальная образовательная траектория – это персональный путь, формируемый для развития потенциала студента, который все активнее применяется в информационной среде университета и внедряется в качестве новых сервисов для улучшения образовательного процесса [1, 2]. Настоящая работа посвящена реализации системы, позволяющей студентам определиться с выбором элективной дисциплины или мини-профиля, определяющего более узкую специализацию обучающихся. Алгоритм, оценив сильные стороны студента, предсказывает баллы по дисциплинам каждого семестра и тем самым помогают определить подходящее для развития учащегося направление. В работе используются методы дата-майнинга для извлечения информации из всех источников, которые были сформированы в образовательном процессе. Это исторические данные об оценках учащихся, полученные из электронной информационно-образовательной среды (ЭИОС) ФГБОУ ВО «МГУ им Н.П. Огарёва», учебные планы, перечень изучаемых дисциплин и аннотации к дисциплинам.

В реализованной системе для учета как профессиональных интересов, так и способностей обучающихся объединены модели коллаборативной и контентной фильтрации. Коллаборативная фильтрация на основе известных оценок по дисциплинам группы студентов прогнозирует неизвестные оценки для других пользователей. Контентная фильтрация основывается на аннотациях уже пройденных дисциплин. Результатом ее работы является рекомендация тех предметов, которые наиболее похожи на пройденные для отдельно взятого студента. Гибридная фильтрация объединяет эти результаты и предсказывает баллы за дисциплины текущего семестра. На основе предсказанных значений можно строить рекомендации дисциплин для индивидуальной образовательной траектории.

2. Анализ и предобработка данных

2.1. Предобработка аннотаций дисциплин

Файлы с аннотациями дисциплин хранятся в формате pdf, поэтому потребовалась конвертация данных в формат таблицы с последующей программной обработкой текста. В нее вошли очистка текста от неалфавитных символов, их токенизация, лемманизация, удаление стоп-слов и векторизация текста [3].

Для векторизации текста, то есть превращения его в численную форму, использован метод TF-IDF [4], оценивающий важность слов в документах. TF-IDF вычисляется по формуле

$$TF - IDF(w, d, D) = TF(w, d) \times IDF(w, D),$$

где $TF(t,d) = log\frac{n_i}{\sum_k n_k}$ и $IDF(t,D) = log\frac{|D|}{|\{d_i \in D | t \in d_i\}|}$ – соответственно частота и обратная терма. Здесь n_i – число вхождений слова i в документ, $\sum_k n_k$ – общее число слов в документе, $|D|$ – число документов в корпусе D, $|\{d_i \in D | t \in d_i\}|$ – число документов из коллекции D, в которых встречается слово i (при $n_t \neq 0$).

После того, как аннотации дисциплин каждого направления подготовки приведены в векторную форму, вычисляется косинусная оценка их сходства. В результате для каждого направления подготовки получается симметричная матрица, в которой хранятся оценки сходства всех дисциплин направления. Полученные матрицы представляются в виде таблицы, где столбцы и строки – названия дисциплин. Направления и уровни обучения являются ключами к таблицам. Таблицы, в свою очередь, являются значениями в словаре.

2.2. Предобработка данных из электронной информационно-образовательной среды

Для реализации коллаборативной фильтрации была получена база данных из ЭИОС с оценками студентов факультета математики и информационных технологий МГУ им. Н.П. Огарёва с 2016 по 2022 учебный год. В базе данных хранятся три таблицы: справочник с информацией о дисциплинах, баллы за контрольные точки в рейтинг-плане, рейтинг-план. После отсеивания полей, которые не дают полезной информации, а также соединения таблиц в одну, получилась таблица со структурой, показанной на рисунке 1.

	id_student_mark	sum_point_mark	name_subject	semestr_subject	level_study_subject	speciality_subject	study_year_subject
30739	af20a2aa-06ed-449f-bf4c-3e67f45fcdb8	31	Математический анализ	1	Бакалавр	Математика и компьютерные науки	2016 - 2017
31029	be87d56b-1748-4b8a-ae40-3828860a782f	26,5	Математический анализ	1	Бакалавр	Математика и компьютерные науки	2016 - 2017
31257	b770e493-f710-4748-aff7-46fae8b0d0e5	24	Математический анализ	1	Бакалавр	Математика и компьютерные науки	2016 - 2017
31461	86b5d7e0-a7c6-4c85-b17c-f763d7e4ce03	22	Математический анализ	1	Бакалавр	Математика и компьютерные науки	2016 - 2017
31609	7af003e6-a739-45de-8fb4-856753b10595	20	Математический анализ	1	Бакалавр	Математика и компьютерные науки	2016 - 2017
...	...	...	...	...	...	...	...
5019	7d5bcca9-c22e-4e9e-af27-977d4b6c0696	91	Методы тестирования программных продуктов	4	Магистр	Фундаментальная информатика и информационные т...	2021 - 2022
5715	753bfbf8-f7a3-43d7-8415-b38859249399	90	Облачные технологии и виртуальные среды	4	Магистр	Фундаментальная информатика и информационные т...	2021 - 2022
5930	275c5c4b-9e2e-4a18-baac-c50ef919ae5f	90	Методы тестирования программных продуктов	4	Магистр	Фундаментальная информатика и информационные т...	2021 - 2022
6050	30655277-d710-43b0-83fd-087333768361	90	Облачные технологии и виртуальные среды	4	Магистр	Фундаментальная информатика и информационные т...	2021 - 2022
6581	7d5bcca9-c22e-4e9e-af27-977d4b6c0696	89	Объектно-ориентированные CASE-технологии	4	Магистр	Фундаментальная информатика и информационные т...	2021 - 2022

Рис. 1. Предобработанная таблица

Данные разделяются на таблицы по направлению и уровню обучения. Таким образом, получена структура словаря, где ключами выступают направления и уровни обучения, а значениями – таблицы с оценками. Внутри каждой из таблиц хранятся оценки, индексами выступают семестр и предмет по горизонтали и идентификатор студента по вертикали. Значения таблицы соответствуют набранному студентом баллу за дисциплину в данный семестр. Иллюстрация индексации показана на рисунке 2.

		df50938f-5594-464d-8796-1063773ac708	bed1ed42-e231-4e16-89f7-172516fc63a5	f79f78cb-5c15-489d-a8f3-1e8ea79afbd9	b
semester_subject	name_subject				
1	Алгебра и геометрия	NaN	NaN	NaN	
	Аналитическая геометрия	NaN	NaN	NaN	
	Безопасность жизнедеятельности	NaN	NaN	NaN	
	Введение в направление	NaN	NaN	NaN	
	Иностранный язык	NaN	NaN	NaN	
...	...	...	...	...	
8	Преддипломная практика	95.0	95.0	95.00	
	Программно-аппаратные средства защиты информации	NaN	NaN	NaN	
	Психология	77.0	69.6	66.66	
	Технологии работы с суперкомпьютерами	54.0	51.0	58.00	
	Численные методы решения краевых задач	88.0	81.0	93.00	

115 rows × 250 columns

Рис. 2. Индексация таблицы

3. Реализация алгоритмов фильтрации

3.1. Реализация алгоритма коллаборативной фильтрации

На вход алгоритма поступает информация о студенте, для которого нужно предсказать оценки в конкретном семестре: идентификатор студента, направление обучения, уровень обучения и семестр, на который строится прогноз.

По направлению и уровню обучения в словаре ищется нужная таблица, в которой происходит срез данных – необходимы только семестры, предшествующие поступившему на вход заданному семестру.

Для получившегося среза данных был применен метод k ближайших соседей (метод kNN) [5]. Для оценки близости использованы коэффициент Пирсона и косинусная метрика [6], которые вычисляются соответственно по формулам

$$cosine(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{\sqrt{(\sum_{i=1}^{n} x_i^2) \cdot (\sum_{i=1}^{n} y_i^2)}} \cdot \frac{k_{i<s}}{n_{i<s}} \cdot \frac{k_s}{n_s},$$

$$pearson(\bar{x}, \bar{y}) = cosine(\bar{x} - \hat{x}, \bar{y} - \hat{y}),$$

где x_i, y_i – баллы студентов X и Y; $n_{i<s}$ – количество дисциплин до s-го семестра; $k_{i<s}$ – количество дисциплин до s-го семестра, по которым стоит оценка; n_s – количество дисциплин в s-ом семестре; k_s – количество дисциплин s-го семестра, по которым проставлены баллы; $\hat{x}$ и $\hat{y}$ – средние значения оценок.

С помощью данного алгоритма найдены расстояния до k ближайших соседей – это «похожие» учащиеся для заданного студента. Для найденных «похожих» студентов в данных с конкретным семестром рассчитывается средневзвешенное значение баллов за дисциплины. Это значение рассчитывается по формуле

$$waverage(\bar{x}, \bar{w}) = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i w_i}{\sum_{i=1}^{k} w_i},$$

где x_i – баллы студентов из выборки kNN, w_i – расстояние между заданным студентом и остальными студентами. Если значение x_i не задано, то слагаемое $x_i w_i$ пропускается.

3.2. Реализация алгоритма гибридной фильтрации

Для реализации гибридной фильтрации алгоритм коллаборативной фильтрации был расширен посредством контентной фильтрации. Для указанных студента и семестра отбираются те дисциплины, оценки по которым не были предсказаны на этапе коллаборативной фильтрации. Далее рассчитывается средневзвешенное значение по оценкам за дисциплины с прошлых семестров и матрице с оценками схожести дисциплин. В результате получаем предсказанные оценки по заданным дисциплинам.

В качестве примера можно рассмотреть конкретного студента направления «Программная инженерия» 4 курса. Предсказанные (predict) и реальные (real) оценки можно рассмотреть в таблице 1. Как видно из результата, алгоритм довольно точно предсказывает оценки по нужным дисциплинам.

Таблица 1. Пример предсказания оценок для конкретного студента

Дисциплина	real	predict
Исследование операций	86	85,4
Компьютерный статистический анализ данных	58	54,8
Основы электротехники и электроники	87	87,4
Русский язык и культура речи	57,5	56,8
Теория автоматов и формальных языков	71	70,6
Физика	99,5	92,5

В результате получен алгоритм, который на вход принимает идентификатор студента и интересующий семестр, а на выход отдает предсказанные оценки для дисциплин, которые обозначены в заданном семестре.

4. Тестирование алгоритмов фильтрации

После получения результатов алгоритмов, проведён ряд тестирований отдельно для коллаборативной и гибридной фильтраций. Всего в базе данных насчитывается 663 дисциплины и 1184 студента. Для тестирования было выбрано 1000 случайных студентов и суммарно 7641 дисциплина с выставленными баллами. Так как индивидуальная образовательная траектория сравнительно новое понятие в университете, было решено проводить тестирование на всех возможных дисциплинах, чтобы тестовая выборка была объемнее.

Оценка результатов работы была проведена с помощью двух основных метрик – это средняя абсолютная ошибка (mae) и точность прогноза (accuracy), которые рассчитываются соответственно по формулам

$$mae(\bar{x},\bar{y}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|x_i - y_i|, \quad accuracy(\bar{x},\bar{y}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}[T(x_i) = T(y_i)],$$

где x_i, y_i – баллы студентов X и Y; $T(x)$ – переводит стобалльные значения в академические оценки.

Визуализация для mae и accuracy представлена на рисунках 3– 6. Из полученных значений можно сделать вывод, что лучшие параметры для любой из моделей – это косинусная метрика оценки и $k = 3$ ближайших соседей.



Рис. 3. Зависимость mae от количества ближайших соседей для коллаборативной фильтрации

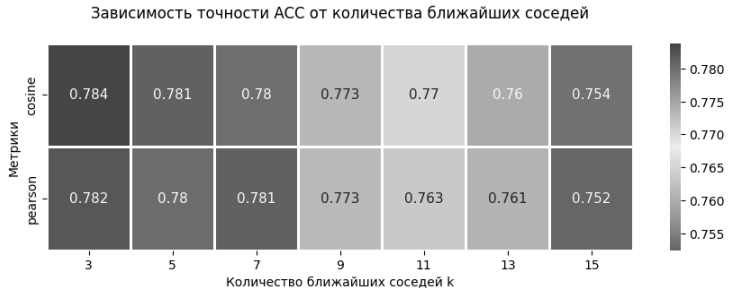


Рис. 4. Зависимость accuracy от количества ближайших соседей для коллаборативной фильтрации



Рис. 5. Зависимость mae от количества ближайших соседей для гибридной фильтрации

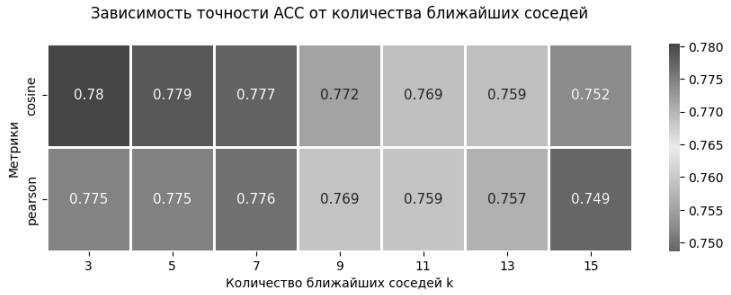


Рис. 6. Зависимость accuracy от количества ближайших соседей для гибридной фильтрации

По посчитанным значениям на графиках видно, что чисто коллаборативная фильтрация дает немного лучший результат, чем гибридная фильтрация: $mae = 5{,}5$, а у гибридной $mae = 5{,}65$. Но при этом, процент непредсказанных значений у гибридной фильтрации ниже (3,9 %), чем у коллаборативной (5,3 %). Это понятно из графиков, представленных на рисунках 7–8.

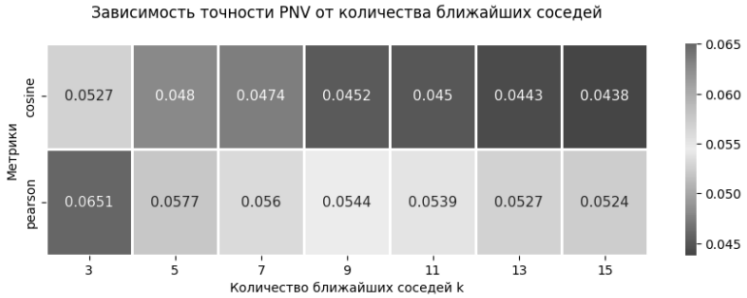


Рис. 7. Процент непредсказанных значений для коллаборативной фильтрации

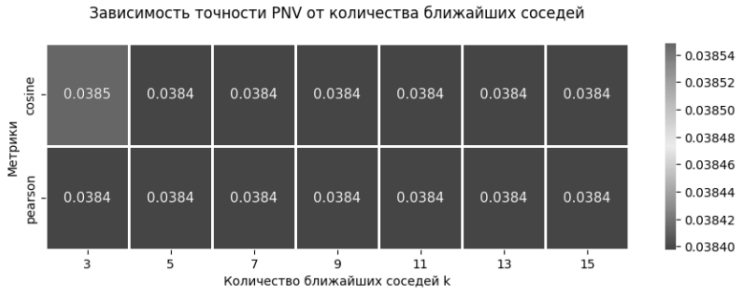


Рис. 8. Процент непредсказанных значений для гибридной фильтрации

5. Заключение

В работе реализованы алгоритмы фильтрации для рекомендации дисциплин, которые могут попасть в индивидуальную образовательную траекторию студента. Эти алгоритмы предсказывают оценки за дисциплины текущего семестра на основе данных о схожести с другими студентами и информации об оценках за уже пройденные семестры. На основе предсказанных оценок можно строить рекомендации дисциплин для индивидуальной образовательной траектории.

Произведено сравнение двух реализованных алгоритмов, которое показало, что по точности предсказания оценок незначительно лучше справляется алгоритм коллаборативной фильтрации, но при этом количество предсказанных значений преобладает у алгоритма гибридной фильтрации. Так как разница в точности невелика, предполагается, что целесообразнее использовать гибридную фильтрацию для большего количества рекомендаций.

Литература

1. Захарова И.Г., Воробьева М.С., Боганюк Ю.В. Сопровождение индивидуальных образовательных траекторий на основе концепции объяснимого искусственного интеллекта // Образование и наука. 2022. Т. 24. № 1. С. 163–190.
2. Липко Ю.Ю. Исследование методов моделирования рекомендательных веб-сервисов выбора образовательных ресурсов для реализации индивидуальных образовательных траекторий, обучающихся на основе коллаборативной фильтрации // Известия ЮФУ. Технические науки. 2016. № 8(181). С. 115–122.
3. Ганегедара Т. Обработка естественного языка с TensorFlow / пер. с анг. В.С. Яценкова. М.: ДМК Пресс, 2020. 382 с.
4. Гольдберг Й. Нейросетевые методы в обработке естественного языка / пер. с анг. А.А. Слинкина. М.: ДМК Пресс, 2019. 282 с
5. Ajitsaria A. Build a Recommendation Engine With Collaborative Filtering. URL: https://realpython.com/build-recommendation-engine-collaborative-filtering/#what-is-collaborative-filtering (дата обращения: 29.08.2023).
6. Sharma A. Beginner Tutorial: Recommender Systems in URL: https://www.datacamp.com/tutorial/recommender-systems-python (дата обращения: 29.08.2023).

СТРУКТУРА СПЕКТРА СЛУЧАЙНЫХ ДРЕВОВИДНЫХ МАТРИЦ[1*]

А.А. Горчавкина, А.М. Сатанин

Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»

Древовидные матрицы возникают при изучении различных ветвящихся процессов. В работе продемонстрирована связь задачи Раби, широко используемой в квантовой оптике для описания взаимодействия двухуровневой системы (кубита) с фотонным полем в резонаторе, с теорией древовидных матриц. Численными методами получена функция распределения межуровневых расстояний. Обнаружено, что функция распределения сужается с ростом константы связи кубита и поля. Дана интерпретация полученному эффекту.

Ключевые слова: кубит, резонатор, фотонное поле, модель Раби, спектр, древовидные матрицы, статистика межуровневых расстояний.

1. Введение

Базисным элементом квантовых информационных устройств являются двухуровневые системы или квантовые биты (кубиты) [1,2]. Процесс считывание состояний кубита основан на слабом расщеплении уровней при взаимодействии с резонатором. Ранее было показано, что взаимодействие уединенной моды резонатора с кубитом в дипольном приближении может быть описано в рамках модели Раби [1-3]. Несмотря на то, что различные аспекты модели Раби давно дискутируются в литературе [5], некоторые вопросы, касающиеся структуры спектра, распространения возбуждений, сильной связи кубита с резонатором и т.п., в настоящее время все еще остаются открытыми [4]. Поскольку данная модель описывает процесс реального считывания состояний кубита фотонным резонатором, то для приложений важен вопрос о стабильности работы считывающих устройств, в данном контексте, вопрос об условиях на параметры системы, при которых возможна хаотизация фотон-кубитных возбуждений в модели Раби.

В данной работе установлена связь задачи Раби с теорией древовидных матриц, которые активно исследуются в теории ветвящихся процессов, а изучение статистики таких матриц позволило ранее описать сценарий возникновение хаоса в ряде систем [5-9]. Будет показано, что с ростом констант связи происходит изменение топологии древовидной матрицы. Полученные результаты дают ответ на вопрос о стабильности системы кубит-микроволновое поле в резонаторе в зависимости от параметров системы, что весьма актуально для теории квантовых измерений.

2. Матричная формулировка модели Раби

Для описания связи кубита с резонатором используется модель Раби, гамильтониан которой имеет вид (в системе единиц с $\hbar = 1$) [3,4]:

$$H_{AR} = \frac{1}{2}\omega_{\mathrm{q}}\sigma_z + \omega a^{\dagger}a + g_e\left(a^{\dagger} + a\right)\sigma_x \ , \qquad (1)$$

где $a^{\dagger}$ и a – операторы рождения и уничтожения фотонов; σ_x и σ_z – матрицы Паули; g_e – константа взаимодействия, отвечающая за электро-дипольное взаимодействие. Выписанные слагаемые имеют ясный физический смысл. Первое слагаемое представляет собой кубит: если $|\sigma\rangle$ собственный вектор псевдоспинового оператора σ_z, то энергия кубита принимает два значения: $E_\sigma = \frac{1}{2}\omega_{\mathrm{q}}\sigma$, $\sigma = \pm 1$. Второе – описывает фотонную моду в резонаторе. Гамильтониан

[1*] Работа выполнялась при финансовой поддержке Российского научного фонда (грант # 22-21-00586).

$\omega a^{\dagger}a$ диагонален в фоковском базисе $|n\rangle$, при этом его собственные значения $E_n = \omega n$ представляют собой серию эквидистантных уровней ($\omega n, n = 0,1,...$). Последнее слагаемое отвечает за взаимодействие между электрическим полем и диполем ($\sim \vec{d} \cdot \vec{E}$) и вызывает переходы между состояниями кубита и осциллятора.

Матричные элементы (1) в базисе $|n\rangle \otimes |\sigma\rangle$ представляют собой блочно-трехдиагональную матрицу, которая в принципе может быть легко диагонализована любой стандартной процедурой. Проблема заключается в том, что система обладает скрытой симметрией, которая связана с существованием оператора четности, приводящего к вырождению собственных значений. Чтобы снять отмеченную особенность спектра, можно совершить унитарное преобразование, осуществляемое матрицей $U(\alpha) = \frac{1}{2} D(\alpha)\left((1-R)\sigma_z - i(1+R)\sigma_y\right)$, где $D(\alpha) = \exp\left(\alpha\left(a^{\dagger} - a\right)\right)$, $R = \cos(a\dagger a)$, $\alpha = -g_e / \omega$, которое приводит гамильтониан Раби (1) к виду:

$$\bar{H} = U^{-1}(\alpha) H U(\alpha) = \omega a^{\dagger}a - \frac{g_e^2}{\omega}\ \text{-}\sigma_z \frac{1}{2}\omega_{\text{q}} R(\alpha), \tag{2}$$

где $R(\alpha) = \cos\left(\pi\left(a^{\dagger} + \alpha\right)\left(a + \alpha\right)\right)$.

Таким образом, в результате преобразований мы имеем «расщепленное» по псевдоспину гильбертово пространство состояний на два ортогональных подпространства, различающиеся проекцией псевдоспина $\sigma = \pm 1$. При этом нетривиальный характер заполнения преобразованной матрицы определяется оператором $R(\alpha)$.

Матричные элементы гамильтониана (2) в базисе $|n\rangle \otimes |\sigma\rangle$ нетрудно выписать в явном виде:

$$\langle m|\bar{H}|n\rangle = \left(\omega n - \frac{g_e^2}{\omega}\right)\delta_{m,n}\ \text{-}\sigma \frac{1}{2}\omega_{\text{q}} R_{m,n}(\alpha) \tag{3}$$

где

$$R_{m,n}(\alpha) = \sum_{l=0}^{\infty} D_{m,l}(-\alpha)(-1)^l D_{l,n}(\alpha), \tag{4}$$

а матричные элементы $D_{m,m}(\alpha)$ определяются выражением:

$$D_{m,n}(\alpha) = \begin{cases} \sqrt{\frac{n!}{m!}} e^{-|\alpha|^2/2} \alpha^{m-n} L_n^{m-n}(|\alpha|^2), m > n, \\ \sqrt{\frac{m!}{n!}} e^{-|\alpha|^2/2} \alpha^{n-m} L_n^{n-m}(|\alpha|^2), n > m, \end{cases} \tag{5}$$

где $L_n^m(x)$ – присоединенные полиномы Лаггера. Дальнейший анализ будет направлен на изучение собственных значений и собственных векторов матрицы Раби (3).

3. Древовидная структура матрицы Раби, результаты моделирования

Отметим, что проблема анализа спектра сложных матриц ранее обсуждалась в теории квантового хаоса и родственных задачах. Как известно, сложные матрицы рассматриваются как представительницы ансамблей (ортогонального, унитарного и т.д.) случайных матриц [5,6]. Иными словами, спектральные свойства таких системы должны определяться не уникальной реализацией (определенным гамильтонианом или матрицей), а статистическими свойствами ансамбля случайных матриц, или более грубыми характеристиками: функциями распределения уровней, корреляционными функциями, статистикой волновых функций и т.д. **Х**орошо известно, что если матрицы принадлежат гауссовскому ансамблю случайных матриц, то собственные значения распределены по полукруговому закону Вигнера [5,6]. Вместе с тем, специальные матрицы типа Теплица, Ханкеля и т.п. характеризуются своей уникальной статистикой [7]. В

этом контексте отметим, что статистика собственных значений широкого класса древовидных матриц, типа матриц (3), до настоящего времени детально не изучена.

Вернемся к анализу матрицы Раби (3). Как следует из анализа (3), при $g_e = 0$ матрица (3) диагональна ($\alpha = 0$), а её собственные значения равны $E_{n,\sigma} = \omega n - \sigma \frac{1}{2}\omega_q (-1)^n$ (далее полагаем $\sigma = 1$). При увеличении параметра связи g_e матричные элементы $R_{m,n}(\alpha)$ растут согласно (4). Если двигаться от диагонали с номером n по строке матрицы, то матричные элементы осциллируют, причем амплитуда осцилляций растет с ростом n. Изменение структуры матрицы (3) в зависимости от безразмерного параметра связи g_e / ω представлена на рисунке 1 (показан фрагмент матрицы).

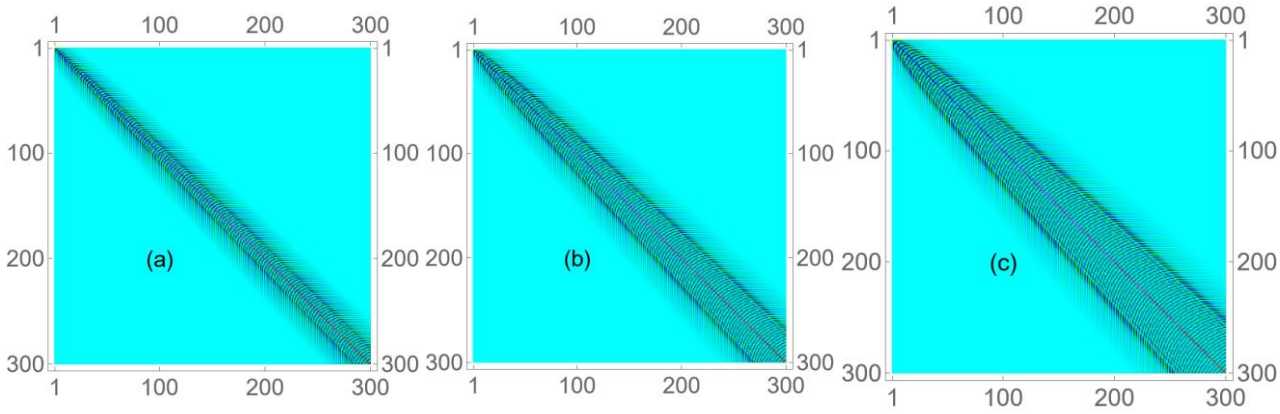


Рис. 1. Визуализация матрицы гамильониана Раби для: (a) g_e = 0.25, (b) g_e = 0.5, (c) g_e = 0.75; цвет показывает абсолютную величину соответствующего матричного элемента

Как видно, матрица Раби имеет иерархическую структуру, напоминающую древовидную. Такого рода матрицы часто встречаются в различных приложениях [8,9]. Однако детальные исследования универсальных свойств функций распределения уровней и статистики ранее не проводилось.

Приведем результаты численного анализа функции распределения $P(s)$ межуровневых расстояний, определяемых матрицей (3), где $s = (E_{j+1} - E_j)/\langle E_l \rangle$ суть межуровневые расстояния, отнесенные к среднему расстоянию между уровнями $\langle E_l \rangle$. Расчет проводился для матриц размером до 5000×5000. На рисунке 2 показано изменение функции распределения межуровневых расстояний в зависимости от константы связи.

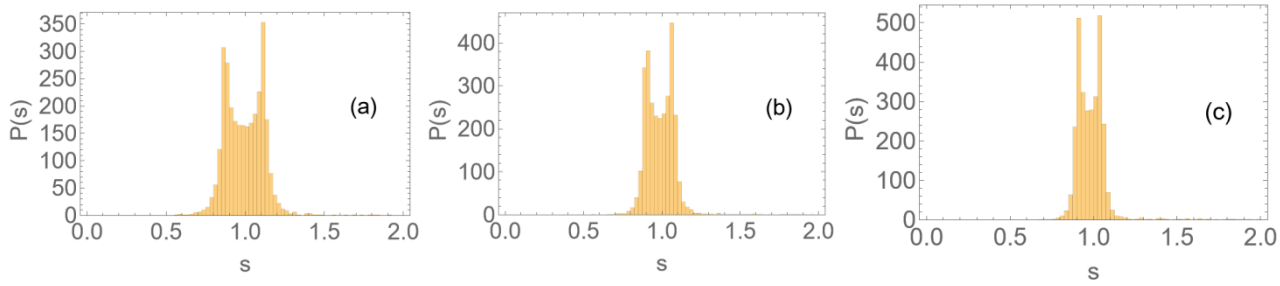


Рис. 2. Результаты численных расчетов $P(s)$ при изменении электрической константы связи; (a) при значении g_e = 0.25 межуровневые расстояния сгруппированы вблизи 1, что отражает свойства спектра матрицы (4); с ростом константы связи для (b) g_e = 0.5 и для (c) g_e = 0.75 наблюдаются сужения распределения вблизи единицы; здесь размер матрицы был выбран равным 3000 x 3000; $\omega = 1.0, \omega_q = 1.1$

Как видно, в выбранном базисе зависимость структуры спектра от g_e определяется матричными элементами $R_{m,n}(\alpha)$. Поскольку спектр $R_{m,n}(\alpha)$ ограничен, уширение распределения $P(s)$ не происходит. Объяснение наблюдаемого поведения вытекает их структуры (3) и состоит в следующем. Фактически, в новом базисе гамильтониан (2) представляет собой необычный нелинейный осциллятор, у которого вид нелинейности определяется «потенциалом» $\cos\left(\pi\left(a^{\dagger}+\alpha\right)\left(a+\alpha\right)\right)$, спектр которого ограничен, поэтому увеличение разброса межуровневых расстояний не происходит.

4. Заключение

Таким образом, мы установили связь задачи Раби с теорией древовидных матриц. Было показано, что с ростом константы связи резонатора с кубитом происходит изменение топологии древовидной матрицы, что меняет структуру матрицы Раби и её спектр. При этом оказалось, что вид функции распределения межуровневых расстояний сужается при изменении константаны связи. Это свойство косвенно свидетельствует о стабильности системы кубит-микроволновое поле в резонаторе в зависимости от параметров системы. Дальнейший анализ спектра и статистики межуровневых расстояний требует увеличения размеров матриц и предполагает использование суперкомпьютерных технологий.

Литература

1. Krantz P, Kjaergaard M., Yan F., Orlando T.P., Gustavsson S., Oliver W.D. A quantum engineer’s guide to superconducting qubits //Appl. Phys. Rev. 2019. Vol. 6, P. 021318. https://doi.org/10.1063/1.5089550.
2. Вожаков В.А., Бастракова М.В., Кленов Н.В., Соловьев И.И., Погосов В.В., Бабухин Д.В., Жуков А.А., Сатанин А.М. Управление состояниями в сверхпроводниковых квантовых процессорах // Успехи физических наук. 2022. Т. 192. № 5. DOI: 10.3367/UFNr.2021.02.038934.
3. Rabi I.I. Space quantization in a gyrating magnetic field// Phys. Rev. 1937. Vol. 51, P. 652 (1937). https://doi.org/10.1103/PhysRev.51.652.
4. Kockum, F.A., Miranowicz, A., De Liberato, S. et al. Ultrastrong coupling between light and matter// Nat Rev Phys 2019. Vol. 1, P. 19–40. doi.org/10.1038/s42254-018-0006-2.
5. Müller-Groeling G., A. and Weidenmüller H.A., Random Matrix Theories in Quantum Physics: Common Concepts//Phys. Reports. 1998. Vol. 299, P.189-425. doi.org/10.1016/S0370-1573(97)00088-4.
6. Mehta M. L., Random matrices, Third edition, Pure and Applied Mathematics (Amsterdam), 142, Elsevier/Academic Press, Amsterdam, 2004, xviii+688 pp.
7. Bogomolny E., Giraud O. Statistical properties of structured random matrices// Phys. Rev. E . 2021. Vol. 103, P. 042213. doi.org/10.1103/PhysRevE.103.042213.
8. Johnson B., Shneiderman B. Tree -maps: A space-filling approach to the visualization of hierarchical information structures, in Proceedings of IEEE Visualization (VIS), 1991, P. 284–291; DOI: 10.1109/VISUAL.1991.175815.
9. Eades P., Lin T, and Lin X., Two Tree Drawing Conventions//International Journal of Computational Geometry and Applications, 1993. Vol. 3, No. 2, P. 133–153. doi.org/10.1142/S0218195993000099.

ВЛИЯНИЕ ПРАВИЛА АДАПТАЦИИ НА СИНХРОНИЗАЦИЮ В СЕТИ НЕОДНОРОДНЫХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ КУРАМОТО С СИМПЛЕКСНЫМИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯМИ[1*]

А.А. Емельянова[1], В.И. Некоркин[1,2]

[1]Институт прикладной физики им. А.В. Гапонова-Грехова РАН,
[2]Нижегородский госуниверситет им. Н.И. Лобачевского

Обнаружен класс функций адаптации, для которых существует синхронный режим колебаний в сети осцилляторов Курамото с симплексными взаимодействиями. Показано, что разрушение синхронного режима происходит по разным сценариям для сетей с парными и симплексными взаимодействиями. В первом случае реализуется химерное состояние, когда одна часть осцилляторов находится в когерентном состоянии, а другая – в случайном. Во втором случае разрушение синхронного состояния происходит резко и химерное состояние не образуется. Определены закономерности формирования режимов синхронизации и десинхронизации.

Ключевые слова: синхронизация, адаптивные связи, модель Курамото, симплексные взаимодействия, взаимодействия высокого порядка.

1. Введение

Важной проблемой нелинейной динамики является исследование сложных сетей. При этом во многих реальных сетях динамические процессы происходят одновременно в узлах и в связях между элементами. Примером могут служить нейронные сети головного мозга, где необходимо учитывать одновременно электрохимическую активность отдельных клеток и активность аксональных связей между ними. Такие системы хорошо описываются концепцией адаптивных сетей [1]. При этом элементы адаптивных сетей обычно соединяются попарно. Однако недавние исследования показывают, что во многих физических системах существуют взаимодействия и на групповом уровне. Следовательно, некоторые системы можно лучше описать с точки зрения взаимодействий более высокого порядка, когда элементы сети образуют геометрические объекты разных размерностей, отражающие структуру сети [2]. В этой работе мы изучаем режимы синхронизации и десинхронизации в сети адаптивно связанных неоднородных осцилляторов с взаимодействиями высокого порядка, или симплексными взаимодействиями, а также исследуем зависимость синхронных состояний сети от правила адаптации.

2. Модель

Рассматриваемая нами модель имеет следующий вид:

$$\frac{d\theta_i}{dt} = \omega_i + \frac{\Lambda}{N^2}\sum_{j,k=1}^{N} \kappa_{ijk} sin(\theta_j + \theta_k - 2\theta_i),$$

$$\frac{d\kappa_{ijk}}{dt} = -\varepsilon(sin(\theta_j + \theta_k - 2\theta_i + \beta) + \kappa_{ijk}).$$

Здесь θ_i – фазы осцилляторов, κ_{ijk} – коэффициенты связи. Параметр Λ определяет силу связи, ε разделяет быструю динамику фаз и медленную динамику адаптации коэффициентов связи, а параметр β изменяет свойства функции адаптации. Собственные частоты ω_i подчинены равномерному распределению в промежутке [-1,1]. Начальные фазы выбираются равными 0 с вероятностью η и равными π с вероятностью $(1-\eta)$. Начальные веса $\kappa_{ijk}(0) = 1$. Число элементов сети $N = 100$.

[1*] Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда, грант № 23-42-00038.

3. Результаты

Динамика системы была изучена с использованием методов теоретического анализа стационарных состояний сети и численного моделирования. Результаты исследования таковы:

1) Обнаружен класс функций адаптации, для которых существует синхронный режим в сети адаптивно связанных осцилляторов Курамото с симплексными взаимодействиями. Эти функции сосредоточены в достаточно широком диапазоне параметров адаптации и включают в себя правило пластичности Хебба.

2) Показано, что разрушение синхронного режима происходит по-разному для сетей с парными и симплексными взаимодействиями. В первом случае реализуется химерное состояние. Во втором случае при вариации параметра адаптации разрушение синхронного состояния происходит резко и химерное состояние не образуется.

3) Определены закономерности формирования режимов синхронизации и десинхронизации. Обнаружено, что процесс потери устойчивости синхронного состояния сети начинается с осцилляторов в наибольшей собственной частотой и затем иерархически переходит к другим осцилляторам по принципу уменьшения их собственной частоты.

Литература

1. Масленников О.В., Некоркин В.И. Адаптивные динамические сети // Успехи физических наук. 2017. Т. 187, № 7. С. 745–756. DOI: 10.3367/UFNe.2016.10.037902.
2. Boccaletti S., De Lellis P., del Genio C.I., Alfaro-Bittner K., Criado R., Jalan S., Romanc M. The structure and dynamics of networks with higher order interactions // Physics Reports. 2023. Vol. 1018. P. 1–64. DOI: https://doi.org/10.1016/j.physrep.2023.04.002.

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МОДЕЛЬ НЕСТАЦИОНАРНЫХ МНОГОКОМПОНЕНТНЫХ ГАЗОДИНАМИЧЕСКИХ ТЕЧЕНИЙ С УЧЕТОМ ПРОЦЕССОВ СОПРЯЖЕННОГО ТЕПЛООБМЕНА

В.Т. Жуков, Н.Д. Новикова, О.Б. Феодоритова

Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН

Представлена вычислительная суперкомпьютерная модель нестационарных многокомпонентных течений с учетом процессов сопряженного теплообмена газового потока и твердых тел. Модель основана на совместном интегрировании по времени уравнений динамики газовой смеси и уравнения теплопроводности в твердом теле с помощью метода расщепления на конвективный и диффузионный этапы. Вычислительная реализация выполнена на неструктурированных сетках на суперкомпьютерной платформе гидродинамического пакета NOISETTE с комбинированным распараллеливанием, сочетающим стандарты MPI и OpenMP для моделей с распределенной и общей памятью.

Ключевые слова: вычислительная гидродинамика, многокомпонентная газовая смесь, сопряженный теплообмен, суперкомпьютерное моделирование, схема интегрирования по времени.

1. Введение

Моделирование нестационарного сопряженного теплообмена является важным элементом температурного анализа в задачах внутренней и внешней газодинамики. Типичные задачи такого рода возникают при расчетах высокоскоростного обтекания летательных аппаратов, моделировании двигательных установок, расчетах печатных плат, т.е. составляют неотъемлемую часть проектирования практически любого инженерного изделия. В связанной задаче, известной как задача сопряженного теплообмена (CHT – Conjugate Heat Transfer), возникает интерфейсная граница «газ – твердое тело», на которой задаются условия теплообмена в виде непрерывности температуры и нормальной к границе компоненты вектора теплового потока [1, 2]. В ряде работ задача CHT решается с помощью газодинамического и твердотельного теплового компьютерных кодов, см., например, [3]. Первый код интегрирует уравнения в газе, второй код – уравнение теплопроводности в твердом теле. Эти коды периодически обмениваются данными с целью достижения условия сопряжения на интерфейсной границе. Такой метод пригоден для стационарных расчетов.

Для решения нестационарных задач мы предлагаем методику прямого интегрирования по времени определяющих уравнений на неструктурированных многоблочных сетках, без итераций по областям. Постановка задачи включает систему нестационарных уравнений Навье-Стокса с добавлением уравнений диффузии химических компонентов в газовой области [4] и записью в твердом теле нестационарного уравнения теплопроводности. Данная работа не касается непосредственно многокомпонентной модели и химических реакций, в ней рассматриваются численные аспекты метода интегрирования по времени системы определяющих уравнений с учетом сопряженного теплообмена на интерфейсной границе [1, 2]. Метод иллюстрируется на примере численного анализа нестационарной сингулярной задачи с аналитическим решением [5, 6]. Вычислительная реализация метода в виде компьютерного кода MCFL (Multi-Component Flows) выполнена на неструктурированных сетках на суперкомпьютерной платформе гидродинамического пакета NOISETTE [7, 8] с комбинированным распараллеливанием, сочетающим стандарты MPI и OpenMP для моделей с распределенной и общей памятью. В настоящее время проводится работа по переводу кода MCFL на графические ускорители с использованием технологии CUDA на принципе независимости кода от вычислительного устройства (CPU или CUDA).

2. Основные алгоритмические элементы метода

В части пространственной аппроксимации определяющих уравнений [4] мы следуем принципам методики [7], в соответствие с которыми строится конечно-объемная дискретизация с определением сеточных функций в узлах сетки. Ячейками консервативности служат дуальные объемы трехмерной сетки. Газодинамические (конвективные) потоки через грани дуальных ячеек определяются по схеме Годунова [9], обобщенной на многокомпонентный случай, а диссипативные потоки (обусловленные вязкостью, диффузией и теплопроводностью) вычисляются с помощью кусочно-линейного восполнения функций в многогранных ячейках сетки.

Для интегрирования по времени определяющих уравнений используется явно-итерационная чебышевская схема LINS (Local Iterations for Navier-Stokes) [4]. Эта схема в отличие от традиционной явной схемы не имеет ограничения на шаг по времени, а в отличие от неявной схемы она не требует решения системы линейных уравнений. В приложении к задаче сопряженного теплообмена схема LINS обеспечивает аппроксимацию условий сопряжения. Этот результат является следствием консервативной аппроксимации уравнения теплопроводности при условии, что на интерфейсе сетки состыкованы «узел в узел». Простая алгоритмическая структура схемы и блочная организация сеточных данных идеально подходят для массивно-параллельных вычислений.

Блочная организация сеток обеспечивает парциальные дискретизации в газовой области и обтекаемых твердых телах. Обработка интерфейсных узлов, встроенная в явно-итерационную схему LINS и состоящая во взвешивании парциальных приближений, приводит к эквивалентности многоблочного варианта схемы LINS и прямого интегрирования определяющих уравнений на единой сетке. Тем самым предложенный метод решения задач сопряженного теплообмена относится к группе прямых методов интегрирования. Помимо прямых методов существуют методы на основе итераций по областям с итерированием условий сопряжения на интерфейсной границе, см. [3].

Основой математической модели является система уравнений Навье–Стокса, записанная для смеси идеальных газов с учетом теплопроводности и диффузии химических компонентов [1, 2, 4]. Введем для описания газовой смеси вектор консервативных переменных $U \equiv \rho\,(1, \vec{u}, e_{tot},\ Y_m,\ m = 1, ..., N_{sp})$, где ρ – плотность, $\vec{u}$ – вектор скорости среды, $e_{tot} = e + 0.5\,\vec{u}^2$ – полная энергия единицы массы, Y_m – массовая доля компонента m, N_{sp} – их количество. В твердом теле вектор консервативных переменных состоит одной функции – внутренней энергии ε единицы объема: $U \equiv \rho e_{tot} = \rho e = \varepsilon$. Температура T в газе и твердом теле находится из уравнений состояния, в общем случае нелинейных.

Оставляя за сеточным вектором U консервативных переменных прежнее обозначение, запишем на неструктурированной сетке пространственную дискретизацию системы определяющих уравнений в виде дифференциально-разностной схемы

$$U_t + C_h\ U + L_h U = 0\,. \tag{1}$$

Конвективный и диффузионный дискретные нелинейные операторы обозначены как C_h, L_h, здесь h – параметр сеточной дискретизации. В операторе L_h учитываются все диссипативные процессы, т.е. вязкость, теплопроводность и диффузия химических компонентов.

Для системы (1) можно записать двухслойную по времени явную схему с шагом δt:

$$\left(U_{j+1} - U_j\right)\Big/\delta t\ + C_h U_j + L_h U_j = 0\,. \tag{2}$$

Здесь U_j, U_{j+1} – сеточные функции на нижнем и верхнем слоях по времени соответственно. Операторы C_h, L_h в этой схеме зависят от решения U_j на нижнем слое по времени. Явная схема (2) требует для устойчивости ограничения $\delta t^{-1} > \delta t_{conv}^{-1} + \delta t_{dif}^{-1}$, где δt_{conv}, δt_{dif} – шаги по времени, диктуемые соответственно гиперболическим (конвективным) и параболическим (диффузионным) ограничениями [4].

Вместо явной схемы (2) мы используем явно-итерационную схему LINS [4]. Эта схема в силу своих свойств обеспечивает аппроксимацию условий теплообмена и эффективную реали-

зацию расчета в многообластном случае, когда разностная дискретизация становится в целом нестандартной (так как шаблон дискретизации интерфейсного узла лежит в нескольких смежных областях). Гиперболический этап использует конвективный шаг $\delta t \approx \delta t_{conv}$ (с некоторым коэффициентом запаса), а параболический этап интегрируется с этим же временным шагом даже при доминировании диффузии над конвекцией. Если диффузия (включающая вязкость, диффузию химических компонентов и теплопроводность) не доминирует над конвекцией, то схема LINS переходит в традиционную явную схему, что является одним из достоинств схемы LINS. В некоторых нестационарных процессах явный этап может составлять заметную долю (до 90%) от общего числа временных шагов.

Методика интегрирования реализована на основе метода расщепления по физическим процессам. На каждом шаге по времени выполняются два этапа. На этапе 1 полагаем в (1) $L_h \equiv 0$ и находим решение разностного гиперболического уравнения по явной схеме с помощью метода Годунова для многокомпонентной смеси [9]. На этапе 2 полагаем $C_h \equiv 0$ и формулируем разностную параболическую задачу для уравнения вида $U_t + L_h U = 0$ с новыми начальными данными. Указанный этап разбит на два подэтапа. Сначала выполняется совместно вязкий и диффузионный расчеты с помощью применения схемы LINS к редуцированным (без учета конвективных потоков) уравнениям импульса и многокомпонентного переноса. На втором подэтапе решается редуцированное уравнение энергии на основе парциальных дискретизаций в газовой области и твердых телах с восстановлением единых значений внутренней энергии на интерфейсе в процедуре его обработки. В редуцированном уравнении энергии учитывается энерговыделение, обусловленное вязкостью и диффузией в газовой области.

Конструкция схемы LINS диктуется исключительно требованием аппроксимации и устойчивости, для ее построения требуется определить только верхнюю границу λ_{max} спектра сеточного оператора L_h, что делается на основе расчета сумм модулей шаблонных коэффициентов, отвечающих оператору L_h. Переход от U_j на следующий слой по времени U_{j+1} реализуется циклом, состоящим из $q = 2p - 1$ элементарных шагов, называемых нами явными итерациями. Каждый из них по трудоемкости эквивалентен одному шагу явной схемы. Параметр p – степень многочлена Чебышева – определяется без участия эмпирических параметров формулой

$$p = \operatorname{argmin}\left[ctg^2\left(0.25\pi / p \right) - \delta t \cdot \lambda_{max} \right] \approx \left\lceil 0.25\,\pi \sqrt{\delta t\ \lambda_{max} + 1} \right\rceil, \qquad (3)$$

где $p \in Z^+$, $\lceil x \rceil = min\{n \in Z:\ n \geq x\}$. Вместо ограничения $\delta t \sim O(h^2)$ явной схемы, эффективный размер временного шага схемы LINS составляет $O(h^{3/2})$ (в терминах вычислительных затрат с учетом (3)). В нестационарных задачах сопряженного теплообмена и многих других интегрирование с шагом $\delta t \sim const \cdot h$ является физически содержательным ограничением. Схема LINS допускает превышение диффузионного ограничения в любое число раз, но для правильного описания эволюции нестационарных процессов шаг по времени не может быть слишком большим.

3. Результаты численного анализа модельной задачи

Работоспособность схемы иллюстрируется на примере численного анализа модельной задачи о ламинарном обтекании нагреваемой снизу пластины конечной толщины $b = 0.05\,м$. Газовая смесь состоит из двух компонентов, кислорода и азота. Газовый поток ускоряется мгновенно из состояния покоя до постоянной скорости с числом Маха $M_\infty = 3$. Аналитическое решение задачи получено в [5] с помощью преобразования [10], отделяющего уравнение энергии в газе от уравнений непрерывности и импульса.

В этой задаче возникает в начальный момент времени сингулярность в аналитическом решении в виде бесконечного теплового потока на интерфейсе газ–твердое тело. Этот тест является существенно нестационарным и используется для оценки методов расчета сопряженного теплообмена, см. например, [5, 6]. В указанной задаче особенно важно обеспечить корректный расчет динамики тепловых потоков и температуры на интерфейсе, что требует более мелкого

шага по времени, чем величина δt_{conv}, полученная на этапе конвективного расчета. В подтверждение этого факта приведем результаты решения данной модельной задачи с измельчением шагов δt и h по времени и пространству соотвественно. Нами рассмотрены две сетки по пространству – с шагом h и $h/2$, ($h = 10^{-5}$ *м*). Из расчетов следует, что на интервале нестационарного поведения решения интегрирование с конвективным шагом $\delta t \approx \delta t_{conv}$ является грубым с точки зрения аппроксимации условий сопряжения. Расчет с шагом $\delta t \approx 0.01\delta t_{conv}$ приводит к практическому совпадению односторонних тепловых потоков на интерфейсе, за исключением малого интервала времени, в течение которого сказывается влияние сингулярности. Вне этого малого интервала аналитическое и численное решения хорошо согласуются и с ростом времени быстро становятся графически неразличимыми.

Ближе к концу переходного процесса, при $t = 2.4 \cdot 10^{-4}$ с, температура на интерфейсе отличается от аналитического решения на 0.5% и 0.1% на первой и второй сетках соответственно. На более подробной сетке односторонние тепловые потоки по нормали к интерфейсной границе отличаются от точного значения теплового потока на 2% и 3% соответственно, их среднее значение – на 0.7%.

Оценим вычислительную эффективность схемы LINS в расчетах на сетке с указанным шагом h. В случае явной схемы (2) величина шага по времени есть $\delta t \approx 0.0001\delta t_{conv}$ и определяется доминирующей теплопроводностью в твердом теле. Поэтому применение явной схемы вместо схемы LINS (с шагом $\delta t \approx 0.01\delta t_{conv}$) приведет к стократному возрастанию времени счета, что является критическим. Например, расчет по явной схеме на 64-х процессорах вычислительного кластера К-10 ИПМ им. М.В. Келдыша РАН займет несколько суток.

Отметим, что код совместного решения расширенной системы Навье-Стокса и теплопроводности в твердом теле работает в общей среде кода NOISEtte–MCFL [11]. Помимо всего прочего, это значит, что код сохраняет параллельную эффективность, присущую родительскому коду NOISEtte.

Результаты расчетов показывают, что для получения удовлетворительной аппроксимации условий сопряжения нужно решить проблему контроля шага по времени. Для расчета нестационарных задач с переходом к режиму установления необходимо доработать код, включив в число его опций расчеты конвективного этапа с использованием неявной схемы и многосеточного варианта NOISEtte, создаваемого в настоящее время [12].

4. Заключение

Предложенный метод основан на сопряжении процессов теплообмена и обтекания в силу прямого интегрирования по времени определяющих уравнений в газовой области и твердом теле. Алгоритм эффективен в параллельной реализации на многоблочных неструктурированных сетках. Для прямого многообластного расчета предложена техника, основанная на возможностях явно-итерационной чебышевской схемы LINS. Метод может быть обобщен для произвольного расположения и сочетания многоблочных неструктурированных сеток, построенных для описания взаимодействия газодинамического течения с твердыми телами. Граница одного блока может примыкать к нескольким соседним блокам, но полная сетка по границам блоков должна быть состыкована. Анализ расчетов задачи об обтекании высокоскоростным потоком нагреваемой пластины подтверждает перспективность предлагаемого подхода к решению нестационарных задач сопряженного теплообмена.

Литература

1. Feodoritova O.B., Krasnov M.M., Zhukov V.T. A Numerical Method for Conjugate Heat Transfer Problems in Multicomponent Flows // J. Phys.: Conf. Ser., 2021. Vol. 2028. 012024.
2. Feodoritova O.B., Novikova N.D., Zhukov V.T. Development of Numerical Methodology for Unsteady Fluid–Solid Thermal Interaction in Multicomponent Flow Simulation // Lobachevskii J Math 44. 2023. P. 33–43.

3. Galanin M.P., Zhukov V.T., Klyushnev N.V. at al. Implementation of an iterative algorithm for the coupled heat transfer in case of high-speed flow around a body // Computers & Fluids. 2018. Vol. 172. P. 483–491.
4. Feodoritova O.B., Novikova N.D., Zhukov V.T. An explicit iterative scheme for 3D multicomponent heat conducting flow simulation // J. Phys.: Conf. Ser., 2021. Vol. 2028. 012022.
5. Pozzi A., Tognaccini R. Time singularities in conjugated thermo-fluid-dynamic phenomena // J. Fluid Mech., 2005. Vol. 538. P. 361–376.
6. Radenac E., Gressier J., Millan P. Methodology of numerical coupling for transient conjugate heat transfer // Computers & Fluids. 2014. Vol. 100. P. 95–107.
7. Абалакин И.В., Бахвалов П.А., Горобец А.В., Дубень А.П., Козубская Т.К. Параллельный программный комплекс NOISETTE для крупномасштабных расчетов задач аэродинамики и аэроакустики // Вычислительные методы и программирование. 2012. Т.13. С. 110–125.
8. Gorobets A., Bakhvalov P. Heterogeneous CPU+GPU parallelization for high-accuracy scale-resolving simulations of compressible turbulent flows on hybrid supercomputers // Computer Physics Communications. 2022. Vol. 271, 108231.
9. Борисов В.Е., Рыков Ю.Г. Моделирование течений многокомпонентных газовых смесей с использованием метода двойного потока // Матем. моделирование. 2020. Т. 32. № 10. С. 3 – 20.
10. Дородницын А.А. Пограничный слой в сжимаемом газе // Прикл. матем. и механика. 1942. Т. 6. № 6. С. 449–486.
11. Программный комплекс NOISEtte–MCFL для расчета многокомпонентных реагирующих течений / В.Е. Борисов [и др.] // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2023. № 6. 23 с.
12. Gorobets A.V. An approach to the implementation of the multigrid method with full approximation for CFD problems // Comput. Math. Math. Phys. 2023, in press.

ПОВЫШЕНИЕ ЭФФЕКТИВНОСТИ ПРОЦЕССА ШИХТОВАНИЯ В ГОРНОДОБЫВАЮЩЕЙ ПРОМЫШЛЕННОСТИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МЕТОДОВ ОПТИМИЗАЦИИ[1*]

М.Г. Забегалов, К.А. Баркалов

Нижегородский госуниверситет им. Н.И. Лобачевского

Шихтование (смешивание) руды – неотъемлемая часть процесса добычи и переработки руды. Усреднение показателей качества добываемой руды способствует более плавному производственному процессу. Существующее моделирование смешивания руды учитывает только производственные процессы, игнорируя возможности логистики. В данном исследовании предложен метод моделирования смешивания руд, учитывающий возможности транспортировки. С помощью алгоритмов COBYLA и SLSQP была оптимизирована связь между местами добычи и местами переработки. Данный подход должен решить проблему стабилизации качества руды поступающей в переработку.

Ключевые слова: методы линейного программирования, горное дело, COBYLA, SLSQP

1. Введение

Шихтование руды (смешивание руды) является одним из ключевых процессов в горнодобывающей промышленности. Основная задача шихтования – оптимизация показателя разброса качества руды для получения стабильной и высококачественной выходной продукции. Одним из ключевых инструментов для достижения этой цели являются методы линейного программирования.

Качество руды определяет оптимальное соотношение различных типов руды для максимальной эффективности извлечения полезного компонента. Смешивая руду в соответствии с ее качеством, можно достичь лучшего разброса и состава смешанной руды.

Другой аспект улучшения смешивания руды – использование современного оборудования и технологий. Специальные смесители и агрегаты обеспечивают более равномерное смешивание руды и более эффективное использование добавок и реагентов. Это позволяет получить более однородную смешанную руду и повысить эффективность извлечения полезного компонента.

Важную роль играет транспортировка руды. Она может быть дополнительным этапом смешивания, так как руды с различными показателями качества могут быть добыты на разных местах. В процессе транспортировки можно смешивать руду с различными показателями качества для достижения более уравновешенного качества перед переработкой.

В целом, улучшение процесса смешивания руды является важным шагом для повышения эффективности производства и снижения себестоимости добычи. Это позволяет получить более однородную смешанную руду, которая может быть более эффективно использована в дальнейшем производстве [1].

2. Цель исследования

Целью нашего исследования является разработка алгоритмов и методов глобальной оптимизации для шихтования руды с использованием методов линейного программирования. Мы

[1*] Работа выполнена при поддержке Минобрнауки РФ (проект № FSWR-2023-0034) и НОМЦ «Математика технологий будущего» (проект № 075-02-2022-883).

хотим продемонстрировать, что использование этих методов может привести к существенному улучшению показателей качества руды поступающей в переработку.

Для повышения эффективности производства необходимо обеспечить однородность руды во время ее переработки и извлечения полезного компонента. Учитывая различные источники забоев или даже различные рудники, где показатели качества добываемой руды могут значительно отличаться. Однако, для достижения однородности руды возможно использовать метод смешивания на разных этапах транспортировки.

Этот метод позволяет объединить руду из разных источников, чтобы создать однородную смесь. Например, руда может быть смешана во время ее транспортировки с помощью конвейера или других транспортных средств. Это позволяет смешать руду различного качества, чтобы создать смесь с равномерными характеристиками.

3. Процесс добычи и переработки руды на примере АО Апатит

Для целей данного исследования взят процесс добычи апатитовой руды на АО “Апатит”. Общество ведет свою деятельность на территории крупнейшего месторождения - Хибинское на Кольском полуострове, где добывают апатитовые руды, состоящие в основном из фторапатита и нефелина. [2]

Общая схема процесса добычи и переработки руды для АО “Апатит” представлена на Рис. 1.

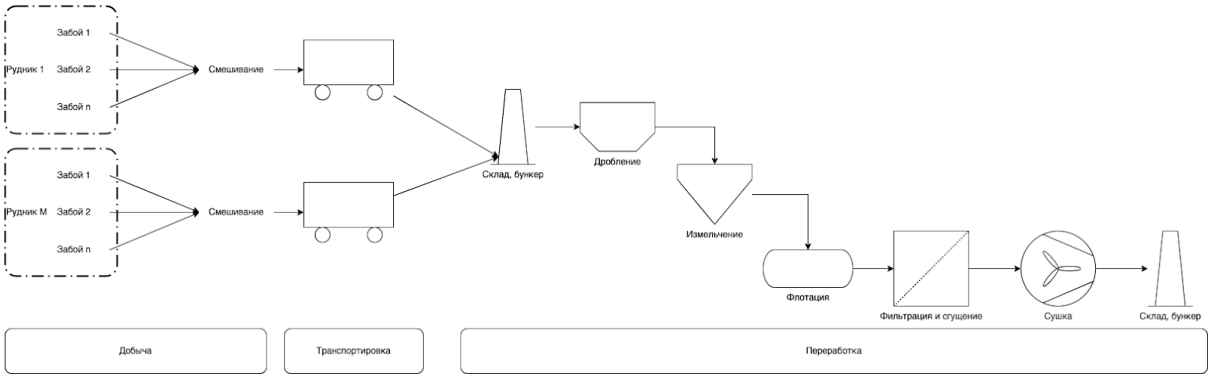


Рис. 1. Общая схема процесса добычи и переработки руды

Представленная схема процесса иллюстрирует деятельность акционерного общества «Апатит», осуществляющего добычу на нескольких рудниках. Руда транспортируется на две фабрики с разными характеристиками производительности, которые выступают в качестве ограничений для математической модели процесса шихтования и ее последующей оптимизации. Возможности транспортировки также должны учитываться данной моделью.

4. Обзор существующих решений

Подавляющее большинство существующих решений строятся вокруг данных разведки и 3D модели рудного тела. Таким программные комплексам как SPA Konsom или Pitram «Materials Management» необходимы результаты рентгено-флуоресцентного анализа (РФА), который не может быть применен с достаточной эффективностью для апатитовых руд.

Исследования на базе SIP (стохастическая целочисленная программа) доказали, что хорошие свойства смешанной руды оказывают существенное влияние на флотационное производство [3–7].

В некоторых исследованиях для расчета используется метод целочисленного динамического программирования. Такие расчеты помогают определить оптимальные схемы смешивания руды при достаточном объеме и полноте исходных данных [8].

Последние исследования по данной тематике предлагают новые алгоритмы и модели смешивания исключая процесс транспортировки и базируются на точных данных по разведке и

прогнозированию рудного тела. Решения на базе доработанного алгоритма NSGA-III [9] и алгоритмов нейронной сети ABC-BP [10] строятся на данных 3D модели рудного тела и не учитывают особенности технологического процесса добычи, транспортировки и переработки руды.

5. Оптимизация процесса шихтования

5.1. Математическая постановка задачи

Под условия исследуемого объекта была сформулирована постановка задачи, которая учитывает производственный процесс добычи, транспортировки и переработки апатитовых руд. Постановка задачи заключается в следующем.

Даны m пунктов потребления руды (заводы). Для каждого завода определен свой максимальный объем потребления. Имеются n возможных пунктов добычи (забоев), при этом для каждого *i*-го пункта известно качество добываемой руды. Причем разброс качества руды для каждого *i*-го пункта описывается зависимостью от объема добычи. Задана матрица возможных транспортных маршрутов (минимальное время перевозки единицы продукции из *i*-го пункта в *j*-й пункт потребления).

Требуется найти такие объемы перевозок x_{ij} из *i*-го в *j*-й пункт и такие объемы добычи, которые минимизируют суммарный разброс p

$$x_i = \sum_j x_{ij}.$$

Задача оптимизации приобретает вид:

$$min\left[L(x_{ij}) = \sum_{ij} a_{ij}x_{ij} + \sum_i f_i(x_i)\right]$$

при условиях

$$\sum_i x_{ij} = b_j,$$

$$x_{ij} \geq 0,$$

$$12 < \sum_i f_i(x_i) < 15.$$

5.2. Текущие результаты решения задачи оптимизации

Для повышения эффективности процесса шихтования руды в Восточном руднике было решено применить алгоритмы COBYLA и SLSQP для поиска решения данной задачи.

COBYLA (Constrained Optimization BY Linear Approximations) и SLSQP (Sequential Least Squares Programming) являются алгоритмами оптимизации, которые позволяют находить оптимальные значения переменных в задачах с ограничениями.

Применение алгоритмов COBYLA и SLSQP для оптимизации процесса шихтования руды в Восточном руднике выполнялось со следующими ограничениями.

Матрица возможных транспортных маршрутов a_{ij} для данного рудника задается в следующем виде:

Таблица 1. Расстояния от места добычи до переработки

Рудник	АНОФ - 2 (км)	АНОФ - 3 (км)
Восточный: Коашва	45, 823	30, 662
Восточный: Ньоркпакх	45, 823	30, 662

Таблица 2. Максимальный объем переработки фабриками

Фабрика	Объем потребления тонн/мес
АНОФ - 2	2655000
АНОФ - 3	487000

Решение задачи было реализовано на языке программирования Python с использованием библиотек NumPy и SciPy. Из последней указанной библиотеки были использованы алгоритмы оптимизации COBYLA и SLSQP через пакет minimize.

6. Заключение

В процессе работы методы SLSQP возникла ошибка, связанная с несовместимостью ограничений неравенства. Было выполнено 139 вычислений функции, 43 итерации и 43 вычисления якобиана. Решение завершилось неудачно, что указывает на то, что метод SLSQP не смог найти решение, удовлетворяющее ограничениям задачи. Вектор переменных, при котором достигается минимальное значение функции, также был определен.

В отношении метода COBYLA, он также не смог найти решение, удовлетворяющее ограничениям задачи. Максимальное нарушение ограничений составляет 7439.03. Минимальное значение функции при использовании метода COBYLA составляет 53951.5 и достигается при определенных значениях переменных. Результат выполнения метода COBYLA не является успешным, и алгоритм не сошелся к решению.

Дальнейшее направление работы будет связано с исследованием математической модели процесса шихтования с целью выбора совместных ограничений в задаче оптимизации. В текущей постановке ограничения оказались слишком жесткими, что приводит к ошибке несовместимости ограничений для обоих использованных методов (SLSQP и COBYLA). Также планируется провести дополнительное исследование данной задачи с использованием методов оптимизации, обладающих глобальной сходимостью.

Литература

1. Nava, J.V.; Llorens, T.; Menéndez-Aguado, J.M. Kinetics of Dry-Batch Grinding in a Laboratory-Scale Ball Mill of Sn–Ta–Nb Minerals from the Penouta Mine (Spain). Metals 2020.
2. Волошин А. В., Майстерман С. А. Минералы Кольского полуострова. – Мурманское книжное издательство, 1983. – 110 с.
3. Lamghari, A.; Dimitrakopoulos, R. A diversified Tabu search approach for the open-pit mine production scheduling problem with metal uncertainty. Eur. J. Oper. Res. 2012.
4. Ramazan, S.; Dimitrakopoulos, R. Production scheduling with uncertain supply: A new solution to the open pit mining problem. Optim. Eng. 2013.
5. Benndorf, J.; Dimitrakopoulos, R. Stochastic long-term production scheduling of iron ore deposits: Integrating joint multi-element geological uncertainty. J. Min. Sci. 2013.
6. Leite, A.; Dimitrakopoulos, R. Stochastic optimisation model for open pit mine planning: Application and risk analysis at copper deposit. Min. Technol. 2013.
7. Goodfellow, R.C.; Dimitrakopoulos, R. Global optimization of open pit mining complexes with uncertainty. Appl. Soft Comput. 2016.
8. Lambert, W.B.; Newman, A.M. Tailored Lagrangian Relaxation for the open pit block sequencing problem. Ann. Oper. Res. 2014.
9. Lu Chen, Qinghua Gu, Rui Wang, Zhidong Feng and Chao Zhang Comprehensive Utilization of Mineral Resources: Optimal Blending of Polymetallic Ore Using an Improved NSGA-III Algorithm, 2022.
10. Bingyu Liu, Dingsen Zhang and Xianwen Gao A Method of Ore Blending Based on the Quality of Beneficiation and Its Application in a Concentrator, 2021.

УПАКОВКИ ПУТЕЙ В ПОРОГОВЫХ ГРАФАХ[1*]

И.В. Захаров[1], Д.Б. Мокеев[1,2]

[1]Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского
[2]Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики» (Нижегородский филиал), лаборатория ЛАТАС

Задача об $\boldsymbol{H}$-упаковке состоит в нахождении в заданном графе $\boldsymbol{G}$ максимального числа подграфов, изоморфных некоторому фиксированному графу $\boldsymbol{H}$ и попарно не содержащих общих вершин. Рассматривается задача об $\boldsymbol{H}$-упаковке для случая, когда $\boldsymbol{H} \simeq \boldsymbol{P_k}$, где $\boldsymbol{k}$ – некоторое натуральное число, т.е. когда граф $\boldsymbol{H}$ изоморфен пути порядка $\boldsymbol{k}$. В данной работе исследуется вычислительная сложность задачи в классе пороговых графов и доказывается её полиномиальная разрешимость для произвольного $\boldsymbol{k}$ в данном классе.

Ключевые слова: упаковки путей в графе, пороговые графы, алгоритмическая сложность.

1. Введение

В работе рассматриваются конечные *обыкновенные* графы, т.е. неориентированные графы $G = (V, E)$ с множеством вершин $V = V(G)$ и множеством рёбер $E = E(G)$, не содержащим петель и кратных рёбер.

Задача об упаковке k-путей (о P_k-упаковке) заключается в следующем. Дан граф G, требуется в этом графе найти наибольшее возможное число путей размера k, попарно не содержащих общих вершин.

Задачи об упаковке возникают при проектировании электронных плат с помощью компьютера [1] и изучаются с точки зрения параметризованной сложности [2]. Известно, что задача является NP-полной для $k \geq 3$ для графов общего вида [3], для двудольных субкубических графов [4] и для плоских двудольных графов [5].

Граф называется *пороговым*, если может быть построен из одновершинного графа последовательным добавлением в граф одной изолированной вершины или доминирующей вершины, т.е. отдельной вершины, связанной со всеми остальными вершинами.

Мы рассматриваем задачу о P_k-разбиении для фиксированного k на пороговых графах. Рассмотрим отдельно случаи чётного и нечётного k.

2. Упаковки чётных путей

Везде в этом разделе $k = 2s$.

Каждый пороговый граф является кографом, а также расщепляемым графом. *Расщепляемым* графом называется граф, в котором вершины можно разделить на клику C и независимое множество I. В случае, если граф G пороговый, множества I и C могут быть упорядочены $v_1, v_2, \dots, v_q$ и $u_1, u_2, \dots, u_r$, соответственно так, что $N(v_{i-1}) \subseteq N(v_i)$ для всех $i \in \{2, 3, \dots, q\}$ и $N(v_i)$ состоит из последовательных вершин $u_1, u_2, \dots, u_r$ для всех $i \in \{1, 2, \dots, p\}$. последовательности $v_1, v_2, \dots, v_q$ и $u_1, u_2, \dots, u_r$ называются *совершенным упорядочением* множества вершин.

Пусть G – пороговый граф с независимым множеством I и кликой C. Пусть $I = (v_1, v_2, \dots, v_q)$, $C = (u_1, u_2, \dots, u_r)$ – совершенное упорядочение множества вершин графа G,

[1*] Работа выполнена при поддержке РНФ, проект № 21-11-00194.

причём $r \geq s$ и в множестве I существует последовательность вершин $v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_s}$ таких, что $i_1 < i_2 < \dots < i_s$ и $deg\left(v_{i_j}\right) \geq j$ для всех $j \in \{1, 2, \dots, q\}$.

Найдём такие $i_1, i_2, \dots, i_s$, что для всех $j \in \{1, 2, \dots, q\}$ и $deg(v_x) < j$ для всех $x < i_j$. Обозначим G' граф, полученный из G удалением вершин $v_1, v_2, \dots, v_{i_s}, u_1, u_2, \dots, u_s$. Обозначим p простой путь в графе G, построенный на вершинах $v_{i_1}, u_1, v_{i_2}, u_2, \dots, v_{i_s}, u_s$ в указанной последовательности.

В противном случае, для некоторого t, $0 \leq t < s$, существуют такие $i_1, i_2, \dots, i_t$, что $i_1 < i_2 < \dots < i_t$, $\forall j \in \{1,2, \dots, t\}: deg\left(v_{i_j}\right) \geq j$ и $deg(v_x) < j$ для всех $i_{j-1} < x < i_j$, $\forall x \in \{i_t + 1, i_t + 2, \dots, r\}: deg(v_x) \leq t$ и $r \geq 2s - t$.

Тогда обозначим G' граф, порождённый вершинами $u_{2s-t+1}, u_{2s-t+2}, \dots, u_r$ графа G и обозначим p простой путь в графе G, построенный на вершинах $v_{i_1}, u_1, v_{i_2}, u_2, \dots, v_{i_t}, u_t, u_{t+1}, \dots, u_{2s-t}$ в указанной последовательности.

Теорема 1. Пусть M' – наибольшая P_{2s}-упаковка графа G'. Тогда $M' \cup \{p\}$ – наибольшая P_{2s}-упаковка графа G.

3. Упаковки нечётных путей

Везде в этом разделе $k = 2s + 1$.

Пусть G – пороговый граф с независимым множеством I и кликой C. Пусть $I = \left(v_1, v_2, \dots, v_q\right)$, $C = (u_1, u_2, \dots, u_r)$ – совершенное упорядочение множества вершин графа G, причём $p \geq s$ и в множестве I существует последовательность вершин $v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_s}$ таких, что $i_1 < i_2 < \dots < i_s < r$ и $deg\left(v_{i_j}\right) \geq j$ для всех $j \in \{1, 2, \dots, q\}$.

Найдём такие $i_1, i_2, \dots, i_s$, что для всех $j \in \{1, 2, \dots, q\}$ и $deg(v_x) < j$ для всех $x < i_j$. Обозначим G' граф, полученный из G удалением вершин $v_1, v_2, \dots, v_{i_s}, v_{i_s+1}, u_1, u_2, \dots, u_s$. Обозначим p простой путь в графе G, построенный на вершинах $v_{i_1}, u_1, v_{i_2}, u_2, \dots, v_{i_s}, u_s, v_{i_s+1}$ в указанной последовательности.

В противном случае, для некоторого t, $0 \leq t < s$, существуют такие $i_1, i_2, \dots, i_t$, что $i_1 < i_2 < \dots < i_t$, $\forall j \in \{1,2, \dots, t\}: deg\left(v_{i_j}\right) \geq j$ и $deg(v_x) < j$ для всех $i_{j-1} < x < i_j$, $\forall x \in \{i_t + 1, i_t + 2, \dots, r\}: deg(v_x) \leq t$ и $r \geq 2s - t + 1$.

Тогда обозначим G' граф, порождённый вершинами $u_{2s-t+2}, u_{2s-t+3}, \dots, u_r$ графа G и обозначим p простой путь в графе G, построенный на вершинах $v_{i_1}, u_1, v_{i_2}, u_2, \dots, v_{i_t}, u_t, u_{t+1}, \dots, u_{2s-t}, u_{2s-t+1}$ в указанной последовательности.

Теорема 2. Пусть M' – наибольшая P_{2s+1}-упаковка графа G'. Тогда $M' \cup \{p\}$ – наибольшая P_{2s}-упаковка графа G.

4. Поиск упаковок с помощью вектора степеней

Граф называется *унографом*, если он однозначно (с точностью до изоморфизма) определяется вектором степеней его вершин. Любой пороговый граф является унографом [6].

Если G – пороговый граф, а $d_1, d_2, \dots, d_n$ – его степени вершин, упорядоченные по неубыванию, то существует совершенное упорядочение $v_1, v_2, \dots, v_q, u_1, u_2, \dots, u_r$ такое, что $deg(v_i) = d_i$ для всех $i = 1, \dots, q$, а также $\deg(u_j) = d_{n-j-1}$ для всех $j = 1, \dots, r$. Иными словами, последовательность $d_1, d_2, \dots, d_n$ соответствует степеням последовательности вершин $v_1, v_2, \dots, v_q, u_r, u_{r-1}, \dots u_1$.

Тогда условия, описанные в предыдущем разделе, выглядят следующим образом. Для чётных путей:

Пусть в графе G есть последовательность $i_1, i_2, \dots, i_s$ такая, что $i_1 < i_2 < \dots < i_s \leq n - s$ и $\forall j \in \{1,2, \dots, s\}: d_{i_j} \geq j$, а $d_x < j$ для всех $i_{j-1} < x < i_j$. Тогда $2s$-путь p построен на вершинах $v_{i_1}, v_n, v_{i_2}, v_{n-1}, \dots, v_{i_s}, v_{n-s+1}$ в указанной последовательности, а граф G' построен на вершинах

$v_{i_s+1}, v_{i_s+2}, \dots, v_{n-s}$ и может быть задан степенной последовательностью $d_{i_s+1} - s, d_{i_s+2} - s, \dots, d_{n-s} - s$.

Для нечётных путей:

Пусть в графе G есть последовательность $i_1, i_2, \dots, i_s$ такая, что $i_1 < i_2 < \dots < i_s < n - s - 1$ и $\forall j \in \{1,2, \dots, s\}: d_{i_j} \geq j$, а $d_x < j$ для всех $i_{j-1} < x < i_j$. Тогда $2s + 1$-путь p построен на вершинах $v_{i_1}, v_n, v_{i_2}, v_{n-1}, \dots, v_{i_s}, v_{n-s+1}, v_{i_s+1}$ в указанной последовательности, а граф G' построен на вершинах $v_{i_s+2}, v_{i_s+3}, \dots, v_{n-s}$ и может быть задан степенной последовательностью $d_{i_s+2} - s, d_{i_s+3} - s, \dots, d_{n-s} - s$.

Подобный подход позволяет реализовать алгоритм поиска наибольшей упаковки с использованием только вектора степеней.

Алгоритм 1.

На входе множество вершин, заданное двусторонним списком $nodes$ размера n, отсортированным по неубыванию степеней. У каждой вершины указана степень deg. Будем использовать счётчик вычитания степени d, равный 0 в начале работы.

Множество $paths \coloneqq \emptyset$ используется для накопления итоговой упаковки.

Выполнять следующую последовательность в цикле. Как только одна из операций невозможна – выход.

```
p ≔ ∅
for i = 1 to s do:
   пока (nodes.first.deg − d < i)
      удалить nodes.first;
   добавить nodes.first и nodes.last к p;
   удалить nodes.first и nodes.last;
если k = 2s + 1, то добавить nodes.first к p и удалить nodes.first;
d ≔ d + s;
добавить p к paths.
```

Итогом работы алгоритма является множество $paths$, являющееся наибольшей упаковкой графа G.

Итак, задача о P_k-упаковке в пороговом графе сводится к задаче нахождения его совершенного упорядочения или вектора степеней, то есть к задаче подсчёта степеней вершин и их сортировки. После этого задача нахождения очередного элемента упаковки решается последовательным проходом по множеству вершин.

Здесь самой трудоёмкой процедурой является подсчёт степеней вершин, имеющий квадратичную сложность относительно числа вершин, так как сложность сортировки можно оценить временем $O(n \cdot \log n)$, а Алгоритм 1 имеет линейную сложность. Таким образом. Справедливо следующее утверждение.

Следствие. Задача о P_k- упаковке в пороговых графах может быть решена за время $O(n^2)$, где n – число вершин в графе.

Литература

1. Hope A. Component placement through graph partitioning in computer-aided printed-wiring-board design. // Electronics Letters. 1972. Vol. 8, No. 4. P. 87–88.
2. Knop D. Partitioning graphs into induced subgraphs. // Discrete Applied Mathematics. 2020. Vol. 272, P. 31–42.
3. Hell P., Kirkpatrick D.G. On the complexity of general graph factor problems // SIAM Journal on Computing. 1983 Vol. 12, P. 601–609.
4. Monnot J., Toulouse S. The path partition problem and related problems in bipartite graphs // Operations Research Letters. 2007. Vol. 35, No. 5. P. 677–684.
5. Dyer M.E., Frieze A.M. On the complexity of partitioning graphs into connected subgraphs // Discrete Applied Mathematics. 1985 Vol. 10, P. 139–153.
6. Brandstadt A., Le V.B., Spinrad J.P. Graph Classes: A Survey. SIAM Monographs on Discrete Mathematics and Applications, 1999.

ЖЁСТКИЕ ИЗОТОПИИ ВЕЩЕСТВЕННЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ КРИВЫХ МАЛЫХ СТЕПЕНЕЙ[1*]

В.И. Звонилов

Нижегородский госуниверситет им. Н.И. Лобачевского

Перечислены известные результаты по жесткой изотопической классификации плоских кривых степени m ≤ 6 и кривых малых степеней на квадриках. С помощью графов особых вещественных тригональных кривых на поверхности Хирцебруха Σ3 завершается жесткая изотопическая классификация вещественных алгебраических кривых бистепени (4,3) на гиперболоиде, начало которой было положено в [1, 2]. Указан граф смежности камер и стенок в пространстве этих кривых.

Ключевые слова: пространства вещественных алгебраических кривых, кривые на квадриках, тригональные кривые.

1. Введение

Шестнадцатая проблема Гильберта (часть I) ставит задачу изучения топологии неособой вещественной алгебраической кривой, т.е. взаимного расположения её компонент связности на плоскости или на алгебраической поверхности.

Пусть C – пространство вещественных алгебраических кривых фиксированной степени на плоскости или на поверхности и $\Delta \subset C$ – подмножество особых кривых. Множество $\Delta_1 \subset \Delta$ состоит из кривых с одной невырожденной двойной точкой или точкой возврата. Компоненты связности множества $C \backslash \Delta$ (соответственно, Δ_1) называются *камерами* (соответственно, *стенками*).

В 1978 году В.А. Рохлин [3] ввел понятие жесткой изотопии и уточнил 16-ю проблему Гильберта: задача состоит в том, чтобы перечислить камеры пространства C. Всюду ниже *жесткая изотопия* – это путь в камере или в стенке.

2. Определения

Хорошо известно, что неособая вещественная квадрика в P^3 изоморфна $P^1 \times P^1$, а комплексное сопряжение либо сохраняет, либо переставляет сомножители. В первом случае квадрика является *гиперболоидом*, а во втором – *эллипсоидом*.

Пусть $[x_0 : x_1]$, $[y_0 : y_1]$ – однородные координаты на $P^1 \times P^1$. Вещественная алгебраическая кривая бистепени (m_1, m_2) на квадрике определяется уравнением $F(x_0, x_1; y_0, y_1) = 0$, где F – вещественный однородный многочлен степеней m_1 и m_2 по x_0, x_1 и y_0, y_1.

Через $C_{m,n}$ обозначается пространство вещественных алгебраических кривых бистепени (m, n) на квадрике.

Вещественная схема вещественной алгебраической кривой A (на плоскости, на поверхности) – это схема взаимного расположения компонент её вещественной части $\mathbb{R}A$ (вещественных ветвей - для особой кривой). *Овалом* называется компонента, стягиваемая на плоскости, на поверхности.

Вещественная алгебраическая кривая A принадлежит *типу I*, если множество $\mathbb{C}\widetilde{A} \setminus \mathbb{R}\widetilde{A}$ несвязно, где $\widetilde{A}$ – нормализация кривой A, и *типу II*, если оно связно. Если A принадлежит типу I, то ориентация множества $\mathbb{R}\widetilde{A}$ как края замыкания одной из двух половин множества $\mathbb{C}\widetilde{A} \setminus \mathbb{R}\widetilde{A}$ называется *комплексной*. *Комплексная схема* кривой есть вещественная схема, наделённая типом, а для типа I -- комплексными ориентациями.

[1*] Работа поддержана Минобрнауки РФ, проект FSWR-2023-0034.

3. Обзор известных результатов по жесткой изотопической классификации

К настоящему времени жёсткая изотопическая классификация получена: для плоских кривых степени $m \leq 6$, см. [3, 4, 5]; для плоских кривых степени 6 с одной невырожденной двойной точкой [6]; для кривых бистепеней $(m, 1)$, $(m, 2)$, (3,3), (4,4) на гиперболоиде и эллипсоиде [7, 8, 9, 10]; для гиперэллиптических кривых на поверхностях Хирцебруха Σ_k, см. [7]; для кривых бистепени $(m, 3)$ на поверхности Хирцебруха Σ_1, см. [11]; для неособых тригональных кривых на поверхностях Хирцебруха Σ_k, см. [12, 13, 14]; для вещественных трёхчленных кривых на Σ_k с максимальным числом овалов [15].

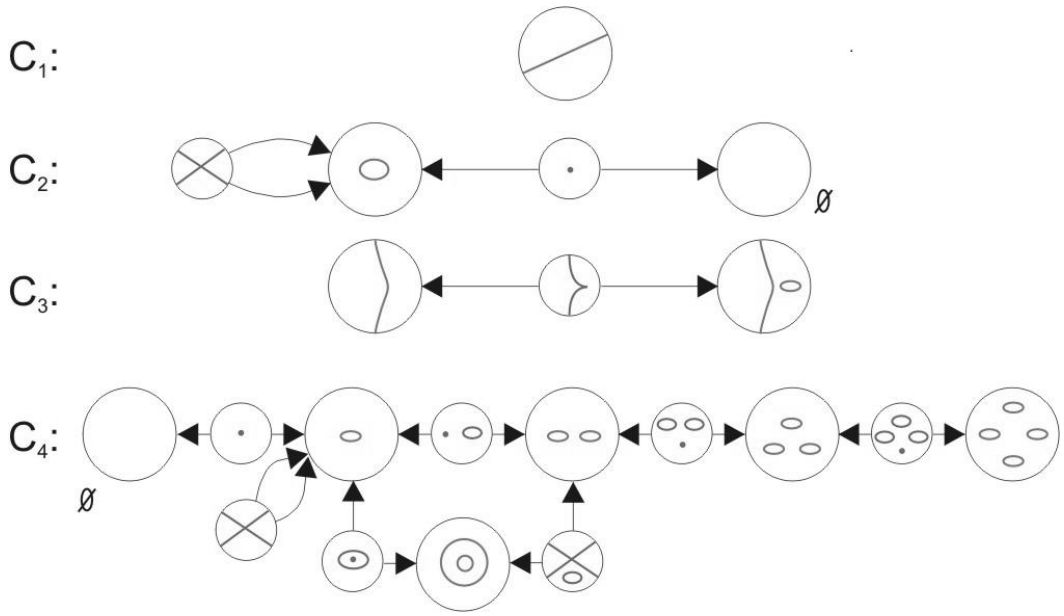


Рис. 1. Камеры и стенки пространств плоских кривых степеней 1 – 4

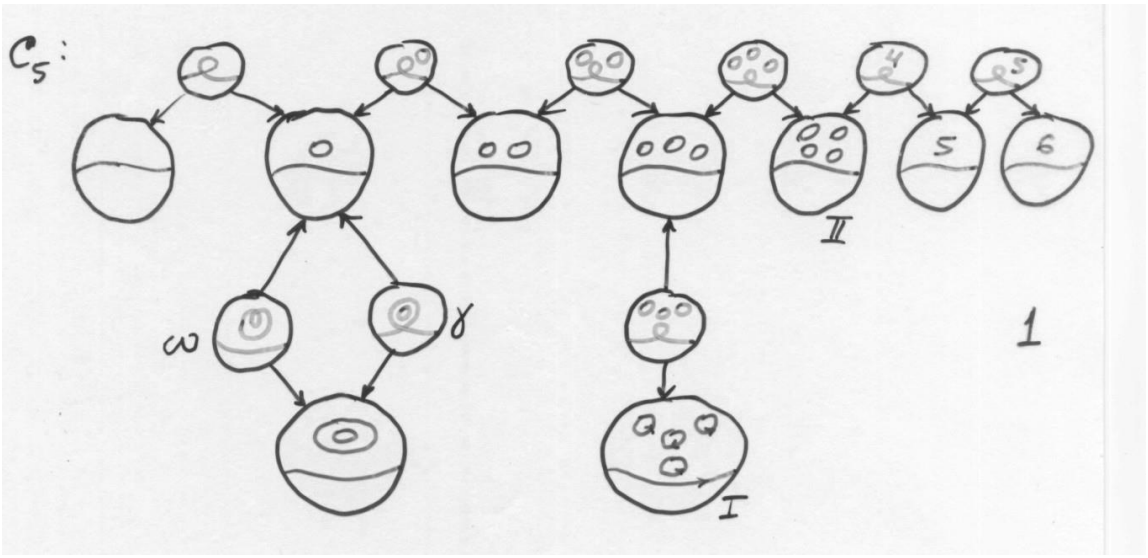


Рис. 2. Камеры и стенки пространства плоских кривых степени 5

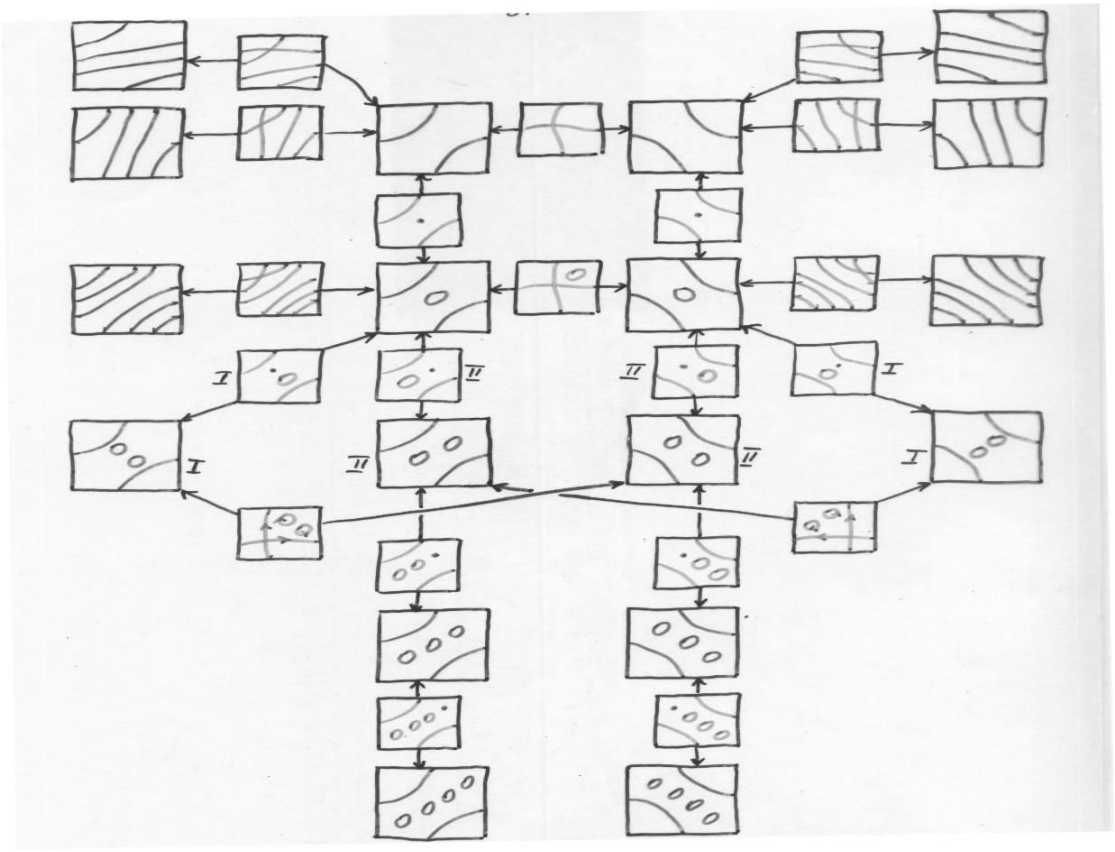
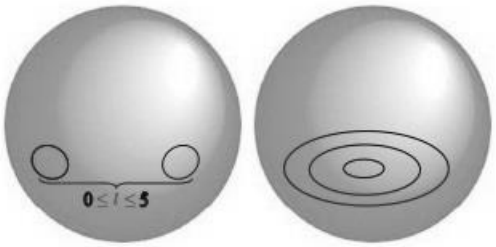


Рис. 3. Камеры и стенки пространства кривых бистепени (3,3) на гиперболоиде



$$\langle 0\rangle - \langle 1\rangle - \langle 2\rangle - \langle 3\rangle - \langle 4\rangle - \langle 5\rangle$$
$$\langle 1\langle 1\langle 1\rangle\rangle\rangle$$

Рис. 4. Камеры и стенки пространства кривых бистепени

4. Основной результат

Теорема 1. Камеры и стенки пространства вещественных алгебраических кривых бистепени (4,3) на гиперболоиде однозначно определяются комплексными схемами соответствующих кривых (см. рис. 1).

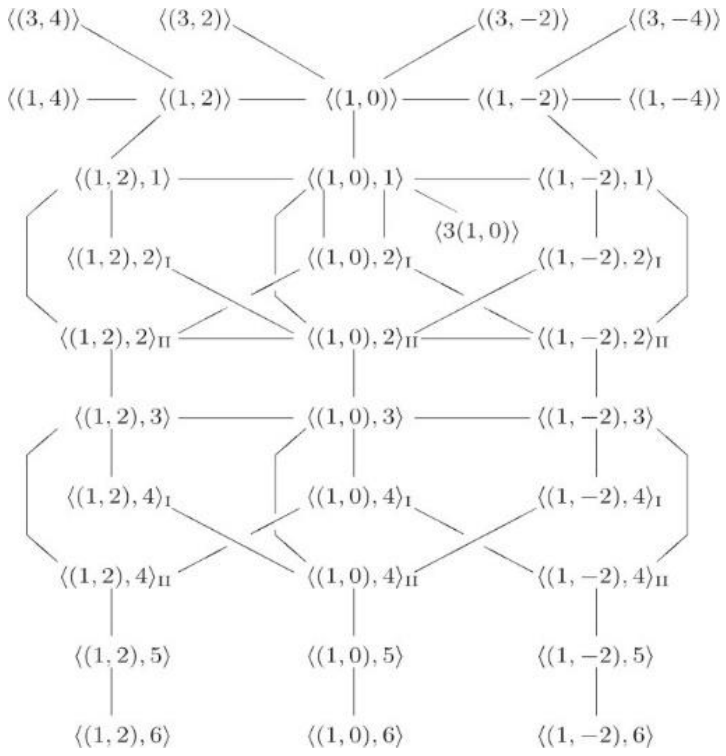


Рис. 5. Камеры и стенки пространства кривых бистепени (4,3) на гиперболоиде

На рис. 5 комплексная схема кривой с l овалами и нестягиваемой на $\mathbb{R}P^1 \times \mathbb{R}P^1$ компонентой, реализующей класс $c_1e_1 + c_2e_2 \in H_1(\mathbb{R}P^1 \times \mathbb{R}P^1)$, обозначается через $\langle (c_1, c_2), l \rangle$ с индексом I или II, если данная вещественная схема *неопределённая*, т.е. содержит комплексные схемы как типа I, так и типа II.

Доказательство теоремы начато в [1, 2]. Для его завершения достаточно перечислить все стенки. Это делается переходом от кривой на гиперболоиде к вещественной тригональной кривой на поверхности Хирцебруха Σ_3 и нахождением канонического графа такой кривой.

Литература

1. Звонилов В.И. Жесткая изотопическая классификация вещественных алгебраических кривых бистепени (4,3) на гиперболоиде // Вестник Сыктывкарского университета, 1999, Сер. 1, вып. 3, с. 81–88.
2. Звонилов В. И. Жесткая изотопическая классификация вещественных алгебраических кривых бистепени (4,3) на гиперболоиде. Приложение // Вестник Сыктывкарского университета, 2003, Сер. 1, вып. 5, с. 239–242.
3. Рохлин В. А. Комплексные топологические характеристики вещественных алгебраических кривых // УМН, 33:5 (1978), 77–89.
4. Degtyarev A., Itenberg I., Kharlamov V. Real Enriques surfaces. Lecture Notes in Math., 2000, vol. 1746, Springer-Verlag, 259 pp.
5. Никулин В.В. Целочисленные квадратичные формы и некоторые их геометрические приложения // Изв. АН СССР. Сер. мат., 1979, т. 43, N1, с. 111–177.
6. Итенберг И. В. Жесткая изотопическая классификация кривых степени 6 с невырожденной двойной точкой // Геометрия и топология. 1, Зап. научн. сем. ЛОМИ, 193, Наука, Л., 1991, 72–89.
7. Дегтярёв А.И., Харламов В.М. Топологические свойства вещественных алгебраических многообразий: du côté de chez Rokhlin // УМН, 2000. Т. 55, вып. 4, С. 129–212.
8. Zvonilov V.I. Stratified spaces of real algebraic curves of bidegree (m, 1) and (m, 2) on a hyperboloid // Amer. Math. Soc. Transl. (2), 1996, vol. 173, p. 253–264.

9. Дегтярев А.И., Звонилов В.И. Жесткая изотопическая классификация вещественных алгебраических кривых бистепени (3,3) на квадриках // Матем. заметки, 1999, т. 66, N. 6, с. 810–815.
10. Nikulin V. V., Saito S. Real K3 surfaces with non-symplectic involution and applications // Proc. London Math. Soc. (3), 90:3 (2005), 591–654.
11. Звонилов В.И. Жесткие изотопии вещественных тригональных кривых на поверхностях Хирцебруха // Записки научных семинаров ПОМИ, 2000, т. 267, с. 133–142.
12. Degtyarev A., Itenberg I., Kharlamov V. On deformation types of real elliptic surfaces // Amer. J. Math. 130 (2008), N. 6, 1561–1627.
13. Degtyarev A., Itenberg I., Zvonilov V. Real trigonal curves and real elliptic surfaces of type I // J. Reine Angew. Math., 686 (2014), 221–246.
14. Zvonilov V.I. Maximally inflected real trigonal curves on Hirzebruch surfaces // Lobachevskii Journal of Mathematics, 43 (2022), N. 3, 720–727.
15. Звонилов В.И. Жесткие изотопии трёхчленных кривых с максимальным числом овалов // Вестник Сыктывкарского университета, 2006, Сер. 1, вып. 6, с. 45–66.

ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ ВОЗМОЖНОСТИ СУЩЕСТВОВАНИЯ МУЛЬТИСТАБИЛЬНОСТИ ВБЛИЗИ ГРАНИЦЫ СИНХРОНИЗАЦИИ, ИНДУЦИРОВАННОЙ ШУМОМ[1*]

Е.Д. Илларионова, О.И. Москаленко

Саратовский национальный исследовательский госуниверситет им. Н.Г. Чернышевского

Обнаружена мультистабильность вблизи границы индуцированной шумом синхронизации в хаотических системах с непрерывным и дискретным временем. В качестве объектов исследования выбраны ансамбли осцилляторов Лоренца и логистических отображений, находящиеся под действием общего источника шума. Наличие мультистабильности подтверждено путем построения бассейнов притяжения синхронных и асинхронных состояний взаимодействующих систем в фиксированные моменты времени.

Ключевые слова: индуцированная шумом синхронизация, обобщенная синхронизация, мультистабильность, белый шум, перемежаемость.

1. Введение

Явление синхронизации, принадлежащее к числу фундаментальных понятий теории нелинейной динамики и хаоса, привлекает к себе широкое внимание исследователей и имеет важное как теоретическое, так и практическое значение, например, в биологических и физических задачах, при скрытой передаче информации с помощью хаотических сигналов, при управлении системами сверхвысокочастотной электроники и т.п. [1-2].

Существует множество типов синхронного поведения, изученные в той или иной степени. Наиболее интересным и менее изученным из них является индуцированная шумом синхронизация. Она предполагает, что при увеличении шумового воздействия [3] на две или более несвязанных между собой хаотических систем, через определенный промежуток времени, они начинают вести себя идентично. Как известно, вблизи границы режима индуцированной шумом синхронизации наблюдается перемежающееся поведение схожее по своим характеристикам с режимом перемежающейся обобщенной синхронизации [5], когда наблюдается чередование синхронного и асинхронного поведения динамических переменных систем.

Недавно было выявлено, что в режиме перемежающейся обобщенной синхронизации присутствует мультистабильность [6]. Данное явление предполагает существование под действием общего хаотического сигнала у одной пары систем синхронного поведения, в то время как у другой пары наблюдается асинхронное поведение. Так как режимы обобщенной и индуцированной шумом синхронизации схожи и отличаются только воздействием внешнего сигнала, можно предположить, что на границе режима индуцированной шумом синхронизации также будет наблюдаться мультистабильность.

В настоящей работе впервые исследуется возможность существования мультистабильности вблизи границы синхронизации, индуцированной шумом в различных классах динамических систем при помощи численного моделирования. С этой целью рассмотрены ансамбли несвязанных между собой систем, находящихся под воздействием общего случайного сигнала.

[1*] Работа выполнена при финансовой поддержке Совета по грантам Президента Российской Федерации для государственной поддержки молодых российских ученых докторов наук (проект № МД-18.2022.1.2).

2. Индуцированная шумом синхронизация

2.1. Объекты и методы исследования

Для иллюстрации поведения ансамбля хаотических осцилляторов рассмотрены следующий набор из *N* хаотических осцилляторов Лоренца под общим источником шума:

Для иллюстрации поведения ансамбля хаотических осцилляторов рассмотрены следующий набор из *N* хаотических осцилляторов Лоренца под общим источником шума:

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{dx}_i}{\mathrm{dt}} = \sigma(\mathrm{y}_i - \mathrm{x}_i) + \xi\mathrm{D} \\ \frac{\mathrm{dy}_i}{\mathrm{dt}} = x_i(r - z_i) - y_i + \xi\mathrm{D} \\ \frac{\mathrm{dz}_i}{\mathrm{dt}} = x_i y_i - \beta\mathrm{z}_i + \xi\mathrm{D}, i = 1, \dots, N \end{cases} \quad (1)$$

и такой же набор логистических отображений:

$$x_{n+1}^i = f\left(x_n^i, \lambda\right) + \mathrm{D}\left(f(\xi_n, \lambda) - f\left(x_n^i, \lambda\right)\right). \quad (2)$$

Здесь $\sigma = 10$, $r = 28$, $\beta = \frac{8}{3}$ – управляющие параметры систем Лоренца, $f(x, \lambda) = \lambda x(1\text{-}x)$, $\lambda = 3.75$ – управляющий параметр логистических отображений, ξ – белый гауссовский шум с нулевым средним значением в случае систем Лоренца и гауссов шум со средним $\mu = 0.5$ и стандартным отклонением $\sigma = 0.12$ в случае логистических отображений, D – управляющий параметр, с помощь которого изменяется интенсивность шумового воздействия, i =1,2 в случае классической синхронизации, индуцированной шумом.

Увеличивая интенсивность шумового воздействия на ансамбль идентичных по управляющим параметрам несвязанных друг с другом хаотических систем, можно добиться идентичности их колебаний, то есть после переходного процесса эти системы начинают вести себя идентично. Такой режим носит название режима индуцированной шумом синхронизации.

2.2. Мультистабильность на границе синхронного режима

Как известно, идентичное поведение во взаимосвязанных системах Лоренца возникает при интенсивности шума D= 7, а в логистических отображениях – при D = 0.1625. Вблизи данных границ для индуцированной шумом синхронизации наблюдается феномен перемежаемости, понимаемый как чередование синхронных (ламинарных) и асинхронных (турбулентных) фаз, причем та или иная фаза в один и тот же момент времени может зависеть от выбора начальных условий анализируемых систем, что говорит о наличии мультистабильности. Для доказательства вышесказанного в фиксированные моменты времени были построены бассейны притяжения, так что начальные точки одной из систем создавали плоскость значений $(x; y)$, а у другой системы фиксировались, при этом обе системы находились под воздействием одного и того же шумового сигнала. Такие бассейны притяжения представлены на рисунке 1 для систем Лоренца (1) при D = 5.75 и для логистических отображений (2) при D = 0.153. На плоскости начальных значений $(x; y)$ синим цветом отмечены те точки, при значении которых системы демонстрируют синхронное поведение, а разность их состояний стремится к нулю, зеленым цветом отмечены точки асинхронного поведения рассматриваемых систем, когда разность их состояний разнится с нулем. Белый цвет отвечает вылету изображающей точки на бесконечность. Видно, что для обеих рассмотренных систем в фиксированные моменты времени в режиме перемежающейся индуцированной шумом синхронизации, имеет место мультистабильность.

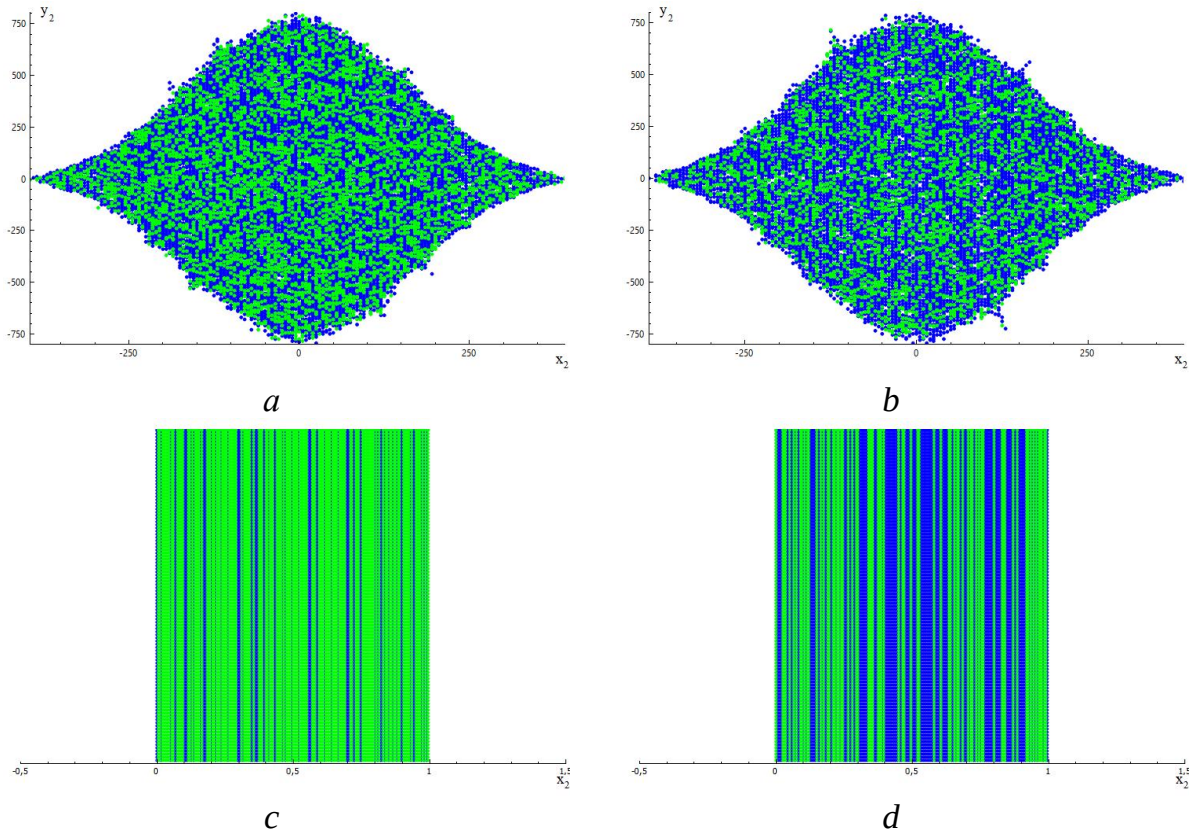


Рис. 1. Бассейны притяжения синхронных и асинхронных состояний одной из систем Лоренца (1), находящихся в режиме перемежающейся синхронизации, индуцированной шумом, при значении параметра связи D = 5.75 на плоскости начальных условий (x2, y2) (z2 = 1.1), полученные в различные моменты времени: (a) t = 1 000, (b) t = 2 000, и одного из логистических отображений (2), находящихся в режиме перемежающейся синхронизации, индуцированной шумом, при значении параметра связи D = 0.153 на линии начальных условий x2, полученные в различные моменты времени: (c) t = 10 000, (d) t = 500 000

Литературы

1. Anishchenko V.S., Astakhov V.V., Neiman A.B., Vadivasova T.E., Schimansky-Geier L Nonlinear. Dynamics of Chaotic and Stochastic Systems. Tutorial and Modern Developments. Springer-Verlag, Heidelberg, 2001.
2. Rosenblum M.G., Pikovsky A.S., Kurths J. Synchronization approach to analysis of biological systems. Fluctuation and Noise Letters. 2004. V. 4. N. 1. P. L53-L62.
3. Wang Y., Lai Y.-C., Zheng Z. Route to noise-induced synchronization in an ensemble of uncoupled chaotic systems. Phys. Rev. E. 2010. V. 81. P. 036201.
4. Москаленко О.И., Короновский А.А., Шурыгина С.А. Перемежающееся поведение на границе индуцированной шумом синхронизации. ЖТФ. 2011. Т. 81. № 9. С. 150-153.
5. Hramov A.E., Koronovskii A.A. Intermittent generalized synchronization in unidirectionally coupled chaotic oscillators. Europhysics Letters. 70, 2 (2005) 169-175
6. Moskalenko O.I., Koronovskii A.A., Selskii A.O., Evstifeev E.V. On multistability near the boundary of generalized synchronization in unidirectionally coupled chaotic systems. Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science. 2021. V. 31. N. 8. P. 083106. DOI: 10.1063/5.0055302.

РЕАЛИЗАЦИЯ ПОИСКА НАИБОЛЕЕ ЧАСТО ВСТРЕЧАЮЩИХСЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ ДНК С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ БИБЛИОТЕКИ KOKKOS[1*]

М.А. Козлов, Е.А. Панова, И.Б. Мееров

Нижегородский госуниверситет им. Н.И. Лобачевского

Большое разнообразие архитектур ставит вопрос разработки универсального программного обеспечения. Библиотека Kokkos [1] на сегодняшний день является одним из наиболее популярных средств для создания кроссплатформенного кода. На примере задачи из биоинформатики по поиску наиболее часто встречающихся последовательностей ДНК мы исследуем некоторые аспекты производительности на CPU и GPU. Мы рассматриваем несколько алгоритмов решения задачи, реализуем их с использованием OpenMP, Cuda и Kokkos и демонстрируем, что потери производительности при использовании Kokkos не превышают 10%, в то время как код может быть запущен на устройствах совершенно разной архитектуры.

Ключевые слова: Kokkos, кроссплатформенное ПО, оптимизация программ, биоинформатика.

1. Введение

Сегодня существует большое число аппаратных архитектур, требующих уникального подхода к разработке параллельного программного обеспечения. Заниматься поддержкой большого количества реализаций трудно, вследствие этого появляется потребность в средствах разработки универсального программного обеспечения. Примерами таких средств являются OpenCL [1], OpenACC [2], Kokkos [3], Alpaka [4] и другие. В нашей работе рассматривается программный пакет Kokkos, являющийся C++ фреймворком для создания кода, который может быть запущен на различных аппаратных платформах (CPU, GPU). Мы исследуем некоторые аспекты написания переносимых производительных программ и демонстрируем, что использование программного пакета Kokkos позволяет разрабатывать универсальное программное обеспечение для различных устройств без существенных потерь в производительности. Демонстрация проводится на базе на примере задачи из области биоинформатики, суть задачи заключается в поиске наиболее часто встречающихся коротких последовательностей в незакодированной ДНК [5]. Алгоритмы [6] решения данной задачи являются разновидностью строковых алгоритмов, которые могут быть усовершенствованы с учетом особенностей предметной области, в частности, алфавита из малого числа символов. В работе приводится сравнение нескольких строковых алгоритмов, обсуждаются особенности их реализации на Kokkos, рассматриваются алгоритмические и программные оптимизации, учитывающие особенности задачи. Авторы предполагают, что результаты, описанные в работе, могут быть полезны при разработке универсального программного обеспечения с использованием Kokkos.

2. Постановка задачи

Наиболее часто встречающиеся последовательности небольшой длины в незакодированной ДНК могут играть важную роль в поддержании структур хромосом. Например, часто встречающиеся последовательности на участке ДНК могут указывать на точку начала репликации генома [5]. Далее мы рассматриваем ДНК как последовательность символов четырехбуквенного алфавита «A», «C», «T», «G»; каждая буква соответствует одному из четырех азотистых осно-

[1*] Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования России, проект № FSWR-2023-0034.

ваний. В такой постановке задача поиска наиболее часто встречающихся последовательностей ДНК сводится к задаче поиска наиболее часто встречающегося паттерна фиксированной длины в строке.

В данной работе рассматривается несколько алгоритмов, решающих данную задачу, а также оценивается эффективность их работы на различных устройствах. На вход алгоритмам подается представленный в виде строки фрагмент незакодированной ДНК длиной $n \sim 10^5$, а также длина искомого паттерна $m \leq 10^3$. Цель заключается в том, чтобы найти количество вхождений в исходный текст каждой его непрерывной подстроки длины m.

Общий псевдокод для решения данной задачи представлен на рис. 1.

```
int[] patternCount(text : string, m : int):
    int n = text.length
    frequency : array [0 .. n − m + 1] of int
    for i from 0 to (n − m + 1):
        pattern = text[i .. i + m - 1]
        frequency[i] = patternCount(text, pattern, n, m)
    return frequency
```

Рис. 1. Псевдокод программы; входные данные: текст длины n и длина паттерна m; выходные данные: массив частот для каждого паттерна

Существует большое количество алгоритмов поиска вхождений паттерна в текст. Их примерами могут служить алгоритмы Рабина-Карпа [7], Кнута-Морриса-Пратта [9], Бойера-Мура [10], Shift-or [11] и другие. Алгоритмы, которые мы рассматривали в данной работе, подробно представлены в разделе 3.

Стоит отметить, что задача по поиску паттернов в строке не требует вычислений с плавающей запятой и относится к классу задач, чья производительность ограничена операциями с памятью.

3. Алгоритмы

3.1. Наивный алгоритм

В качестве базового алгоритма выступает наивный алгоритм. Его идея заключается в том, чтобы поэлементно сравнивать идущие подряд последовательности определенной длины с искомым паттерном. Асимптотическая сложность данного алгоритма $O(mn)$, где n – длина исходного текста, а m – длина искомого паттерна. Поскольку мы применяем его ко всем подстрокам текста, сложность всей программы будет $O(mn^2)$.

```
int naiveStringMatcher(text : string, pattern : string, n : int, m : int):
   int answer = 0
   for i = 0 to n − m:
      if text[i .. i + m - 1] == pattern:
          answer = answer + 1
   return answer
```

Рис. 2. Псевдокод наивного алгоритма

Особенностью наивного решения является последовательное обращение к памяти, что обеспечивает хорошую работу с кэшем процессора.

3.2. Алгоритм Рабина-Карпа

Алгоритм Рабина-Карпа (рис. 3) отличается от наивного тем, что производит сравнение хеш-функций строк. Это позволяет избежать большинства посимвольных сравнений подстрок. С помощью техники скользящего хэша можно пересчитывать значение хеш-функции подстроки «на лету» за константное время. Алгоритм имеет ту же сложность в худшем случае, что и наивная реализация, но на практике работает быстрее.

```
int rabinKarp (text : string, pattern : string, n : int, m : int):
   int answer = 0
   int hashT = hash(text[0..m - 1])
   int hashP = hash(pattern)
   for i = 0 to n − m:
        if hashT == hashP:
             answer = answer + 1
        hashT = hash(hashT, text[i], text[i + m])
   return answer
```

Рис. 3. Псевдокод алгоритма Рабина-Карпа

3.3. Алгоритм hash3

Алгоритм hash3 [8] продолжает идею алгоритма Рабина-Карпа по отсечению как можно большего количества сравнений строк. Для искомого паттерна предварительно вычисляется расстояние от каждой его трехбуквенной подстроки до конца паттерна. Это расстояние записывается в хеш-таблицу, ключом в которой является значение хеш-функции трехбуквенной подстроки. Алгоритм на каждой итерации вычисляет хеш-функцию текущей трехбуквенной подстроки текста и производит сдвиг на значение, сохраненное в хеш-таблице. Таким образом, алгоритм перемещается по памяти непоследовательно, постоянно пытаясь перейти к концу предполагаемого вхождения паттерна в исходный текст. Это сильно уменьшает требуемое количество сравнений.

Алгоритм, представленный в работе [8], можно оптимизировать, исходя из специфики задачи (рис. 4). Поскольку мы имеем дело с четырехбуквенным алфавитом, можно в качестве хеш-функции выбрать уникальный индекс трехбуквенной строки от 0 до 63 и использовать массив вместо хеш-таблицы. Для оптимизации работы на GPU данный массив выделяется в локальной памяти ядра.

```
int hash3(text: string, pattern : string, n : int, m : int):
    int shift_size = 64
    shift : array [0 .. shift_size - 1] of int
    for ind = 0 to shift_size − 1:
        shift[ind] = m
    for j = 2 to (m - 1):
        shift[hash(patern[j - 2 : j])] = m - 1 - j
    int answer = 0
    int j = m - 1
    while j < n:
        int temp_shift = 1
        while temp_shift != 0 and j < size:
            temp_shift = shift[hash(text[j - 2 : j])]
            j += temp_shift
        if j < n and text[j − m + 1 : j] == pattern:
            answer += 1
            j += 1
    return answer
```

Рис. 4. Псевдокод алгоритма hash3

Что касается работы данного алгоритма на различных архитектурах, то он имеет ряд особенностей по сравнению с рассмотренными ранее алгоритмами. Например, большое количество ветвлений может ухудшить работу на GPU. Это связано с тем, что видеокарты основаны на параллельной архитектуре, где большое количество ядер одновременно выполняет одну и ту же инструкцию на разных данных. В случае ветвления кода ядра, для которых не срабатывает условие, простаивают, что снижает эффективность параллельного выполнения. Также непоследовательное перемещение по памяти приводит к тому, что производительность ограничена пропускной способностью памяти как на CPU, так и на GPU.

4. Эксперименты

4.1. Тестовая конфигурация

Все запуски проводились на кластере ННГУ «Лобачевский». Запуски на CPU производились на следующей конфигурации:

- 2 процессора Intel Sandy Bridge E5-2660 2.2 GHz (8 ядер);
- 64 ГБ оперативной памяти;
- компилятор Intel DPC++ Compiler 2023.0.0;
- версия OpenMP 5.0.

Запуски на GPU производились на видеокарте NVidia A100:

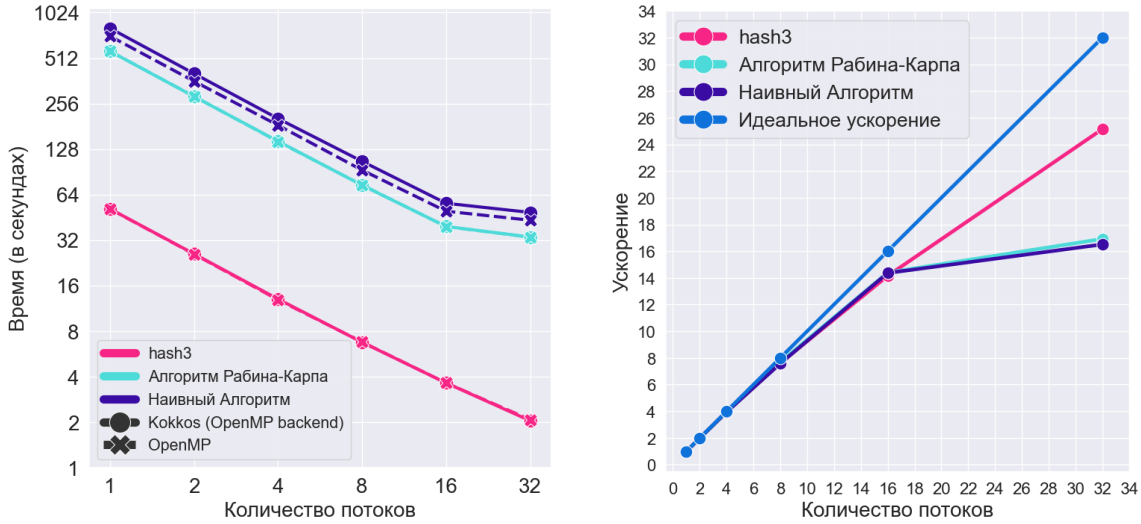
- 40 ГБ видеопамяти (пропускная способность 1555 ГБ/с);
- частота ГП 1410 МГц;
- версия Cuda 11.3.

Также использовалась версия Kokkos 4.0.1.

На вход алгоритмам подается представленный в виде строки фрагмент незакодированной ДНК длиной $n \sim 5 \cdot 10^5$, а также длина искомого паттерна m ($4 \leq m \leq 1024$). В качестве тестовых данных выступают реальные фрагменты ДНК, взятые из открытых источников [13].

4.2. Результаты экспериментов

В процессе работы было разработано несколько версий кода: реализация рассматриваемых алгоритмов для CPU на C++ с использованием OpenMP и векторных вычислений; реализация для GPU на языке Cuda; кроссплатформенная реализация с использованием библиотеки Kokkos. На рис. 5-6 представлены результаты замеров времени для каждой версии кода. Можно видеть, что производительность версии с Kokkos отличается от нативных для данной архитектуры версий всего на 5-10%.



(а) (б)

Рис. 5. Результаты тестирования алгоритмов на CPU ($m = 64$); (а) время работы в зависимости от числа потоков; (б) ускорение алгоритмов; на числе потоков до 16 включительно один поток соответствует одному физическому ядру; 32 потока соответствуют 16 физическим ядрам с включенным гипертредингом

На рис. 5 представлен анализ производительности на CPU. Можно заметить, что алгоритм hash3 работает гораздо быстрее алгоритмов Рабина-Карпа и наивного алгоритма. Алгоритм Рабина-Карпа и hash3 не понесли потери производительности при переходе на Kokkos. Наивный алгоритм при переходе на Kokkos стал работать медленнее примерно на 10%. Это связано с тем, что в нативной реализации компилятор более эффективно задействовал векторные вычисления при посимвольном сравнении паттернов.

Все алгоритмы ускорились примерно в 14 раз при запуске на 16-ти потоках. Это связано с тем, что независимые подзадачи по поиску числа вхождений каждого паттерна были распределены между всеми потоками равномерно. Можно заметить, что алгоритм hash3, в отличие от алгоритма Рабина-Карпа и наивного алгоритма, получил существенный прирост производительности при задействовании гипертрединга. Причиной этому служит то, что при его выполнении без гипертрединга пропускная способность памяти задействована не полностью. Однако выделение большего количества потоков позволяет создавать большее число запросов к памяти, в результате чего шина ОЗУ начинает использоваться активнее, т.е. пропускная способность памяти задействуется эффективнее.

Как и ожидалось, при переходе на GPU алгоритм Рабина-Карпа и наивный алгоритм получили большее ускорение (в 51 и 34 раза соответственно), чем hash3 (в 7 раз). Также можно заметить, что производительность алгоритма hash3 зависит от длины искомой строки (рис. 6). На коротких паттернах не удается достичь отсечения большого количества поэлементных сравнений строк, поэтому на малых длинах паттернов алгоритм показывает меньшую эффективность, чем на больших длинах паттернов. В то же время производительность наивного алгоритма и алгоритма Рабина-Карпа не зависит от длины паттерна, поэтому они показывают более хорошую производительность на коротких паттернах, чем hash3.

Результаты тестирования на GPU также подтверждают то, что реализации данных алгоритмов, написанные с помощью Kokkos, не теряют в производительности относительно нативных решений. Более того, версия программы с использованием Kokkos иногда работает на GPU быстрее, чем простая реализация того же кода на Cuda (рис. 6). Вероятно, Kokkos распределяет задачи между ядрами GPU более эффективно, чем это было сделано нами вручную при написании версии кода на Cuda. Мы предполагаем, что если распределить задачи между ядрами GPU более эффективно, то код на Cuda будет работать не медленнее, чем код на Kokkos. Однако это требует отдельного исследования, в то время как Kokkos выполнил эти оптимизации самостоятельно без нашего участия.

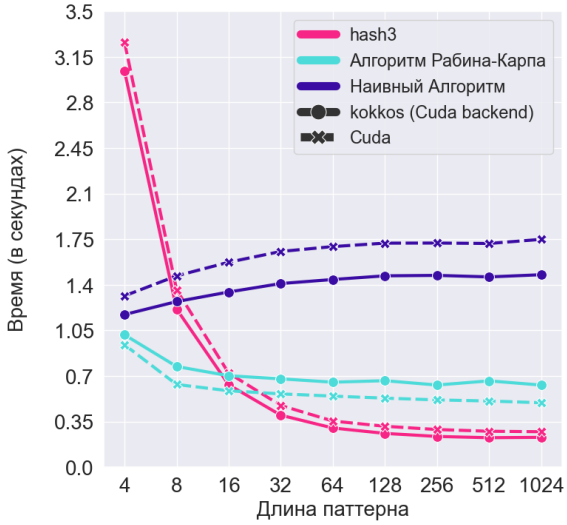


Рис. 6. Результаты тестирования алгоритмов на GPU

5. Заключение

На основе задачи из биоинформатики по поиску наиболее часто встречающихся подстрок небольшой длины в незакодированной ДНК был разработан бенчмарк, демонстрирующий работу рассматриваемых в работе алгоритмов на CPU и GPU с использованием технологий OpenMP и Cuda, а также библиотеки Kokkos. Было продемонстрировано, что во многих случаях версия Kokkos работает не хуже, чем нативная версия кода, при этом может быть запущена на устройствах различной архитектуры. В худшем случае потери производительности составили не более 10%.

Литература

1. Gaster B. et al. Heterogeneous computing with openCL: revised openCL 1. – Newnes, 2012.
2. Farber R. Parallel programming with OpenACC. – Newnes, 2016.
3. Trott C.R. et al. Kokkos 3: Programming model extensions for the exascale era //IEEE Transactions on Parallel and Distributed Systems. – 2021. – Т. 33. – №. 4. – С. 805-817.
4. Zenker E. et al. Alpaka--an abstraction library for parallel kernel acceleration //2016 IEEE International Parallel and Distributed Processing Symposium Workshops (IPDPSW). – IEEE, 2016. – С. 631-640.
5. Subirana J.A., Messeguer X. The most frequent short sequences in non-coding DNA //Nucleic acids research. – 2010. – Т. 38. – №. 4. – С. 1172-1181.
6. Stephen G.A. String searching algorithms. – World Scientific, 1994.
7. Plaxton G. String Matching: Rabin-Karp Algorithm //Theory in Programming Practice. University of Austin, Texas. – 2005.
8. Lecroq T. Fast exact string matching algorithms //Information Processing Letters. – 2007. – Т. 102. – №. 6. – С. 229-235.
9. Régnier M. Knuth-Morris-Pratt algorithm: an analysis //International Symposium on Mathematical Foundations of Computer Science. – Berlin, Heidelberg : Springer Berlin Heidelberg, 1989. – С. 431-444.
10. Lecroq T. A variation on the Boyer-Moore algorithm //Theoretical Computer Science. – 1992. – Т. 92. – №. 1. – С. 119-144.
11. Fredriksson K. Shift-or string matching with super-alphabets //Information Processing Letters. – 2003. – Т. 87. – №. 4. – С. 201-204.
12. Программная реализация. URL: https://github.com/Mishaizlesa/most_common_string_kokkos.
13. DNA Bank (National library of medicine). URL: https://www.ncbi.nlm.nih.gov/genbank.

КЛАССЫ ИЗОМОРФИЗМА ПРОСТЫХ НЕАЛЬТЕРНИРУЮЩИХ ГАМИЛЬТОНОВЫХ АЛГЕБР ЛИ[1*]

А.В. Кондратьева, М.И. Кузнецов

Нижегородский госуниверситет им. Н.И. Лобачевского

Рассматриваются простые неальтернирующие гамильтоновы алгебры Ли над совершенным полем характеристики 2, соответствующие флагу $\boldsymbol{F}$ на пространстве переменных и неальтернирующей гамильтоновой форме с коэффициентами в алгебре разделенных степеней. Основными результатами, полученными при некоторых ограничениях на число переменных и их высоты, являются теорема об инвариантности стандартной фильтрации и теорема о соответствии классов изоморфизма неальтернирующих гамильтоновых алгебр Ли и классов эквивалентности соответствующих дифференциальных форм (с точностью до постоянного множителя) относительно допустимых изоморфизмов алгебр разделенных степеней. Получено описание дифференцирований и автоморфизмов неальтернирующих гамильтоновых алгебр Ли.

Ключевые слова: алгебры Ли, неальтернирующие гамильтоновы формы.

Класс неальтернирующих гамильтоновых алгебр Ли представляет интерес прежде всего в связи с проблемой классификации простых модулярных алгебр Ли.

Хорошо известные алгебры Ли картановского типа, состоящие из векторных полей, сохраняющих специальную, гамильтонову или контактную форму, имеют аналог в характеристике p с заменой алгебры функций на многообразии на алгебру разделенных степеней $O(F)$, соответствующей некоторому обобщенному флагу F пространства E, $F{:}\,E = E_0 \supseteq E_1 \supseteq \cdots$, при этом векторные поля соответствуют специальным дифференцированиям алгебры разделенных степеней (см. [1]). Пусть $\{x_1, \dots, x_n\}$ – базис E, согласованный с F, тогда $O_n(F) = O(n{:}\,\boldsymbol{m})$, где $\boldsymbol{m} = (m_1, \dots, m_n)$ – n-набор высот переменных $x_1, \dots, x_n$ относительно флага F. Классические гамильтоновы алгебры Ли соответствуют альтернирующим дифференциальным формам. В случае поля характеристики 2 можно построить большой класс простых гамильтоновых алгебр Ли, соответствующих неальтернирующим симметричным дифференциальным формам.

Неальтернирующие гамильтоновы алгебры над полем характеристики 2 были впервые построены в 1993 г. Lin Lei [2] как алгебры Ли полиномов в разделенных степенях с симметричной скобкой Пуассона $\{f, g\} = \sum_i \partial_i f \partial_i g$. В случае, когда высоты переменных равны 1, неальтернирующие гамильтоновы алгебры Ли изоморфны первой серии простых алгебр Ли, построенных И. Капланским [3]. В [4, 5] вводятся симметричные дифференциальные формы в разделенных степенях и изучаются неальтернирующие гамильтоновы алгебры Ли, подобные гамильтоновым супералгебрам Ли нулевой характеристики относительно стандартных скобок Пуассона. Результаты различных этапов исследования неальтернирующих гамильтоновых алгебр Ли можно найти в работах авторов [6 – 9], [18 – 22]. Отметим, что альтернирующие гамильтоновы формы рассматривались в работах [10, 11, 12]. Полная классификация альтернирующих гамильтоновых форм получена С.М. Скрябиным ([13, 14]).

Основным результатом настоящей работы является описание классов изоморфизма простых неальтернирующих гамильтоновых фильтрованных алгебр Ли $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{-1} \supset \mathcal{L}_0 \supset \cdots \supset \mathcal{L}_r$, соответствующих флагу F и форме ω, с ассоциированной градуированной алгеброй L, изоморфной градуированной неальтернирующей алгебре Ли со стандартной градуировкой, соответствующей гамильтоновой форме ω_0. Изоморфизм алгебр $O(F)$, $O(F')$, сохраняющий разделенные степени, называется допустимым. Две дифференциальные формы называются эквивалентными, если одна из них переводится в другую допустимым изоморфизмом. Доказательство теоремы об изоморфизме основано на теории усеченных коиндуцированных модулей над транзитивными алгебрами Ли и теоремах вложения, разработанных в [15, 16]. Центральным момен-

[1*] Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (проект FSWR-2023-0034).

том является инвариантность максимальной подалгебры $\mathcal{L}_0$ относительно изоморфизмов алгебр Ли, доказанная первым автором с использованием некоторых идей С.М. Скрябина [17]. Кроме того, получено описание автоморфизмов и дифференцирований простых неальтернирующих гамильтоновых алгебр Ли $\mathcal{L}$. Основное поле K предполагается совершенным характеристики 2.

Положим $\mathfrak{N}(\mathcal{L}) = \{D \in \mathcal{L} \mid (ad\ D)(ad\ D')$ *нильпотентен для любого* $D' \in \mathcal{L}\}$, E^0 – пространство всех изотропных векторов в E относительно формы, двойственной к ω_0.

Теорема 1. *Пусть* $n > 4$, *или* $n = 4, E_1 \not\subset E^0$, *или* $n = 2,3$, $E = E_1$. *Тогда* $\mathcal{L}_0$ *– единственная максимальная подалгебра в* $\mathcal{L}$, *содержащая* $\mathfrak{N}(\mathcal{L})$.

Если неальтернирующие гамильтоновы алгебры Ли $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}_2$ изоморфны и условия теоремы 1 выполняются для одной из них, то они выполняются и для другой.

Теорема 2. *Пусть* $n > 4$, *или* $n = 4, E_1 \not\subset E^0$, *или* $n = 2,3$, $E = E_1$,

1. Простые неальтернирующие гамильтоновы алгебры Ли изоморфны тогда и только тогда, когда соответствующие гамильтоновы формы эквивалентны с точностью до постоянного множителя.

2. Алгебра дифференцирований неальтернирующей гамильтоновой алгебры Ли L изоморфна нормализатору L в p-замыкании алгебры Ли W(F).

3. Автоморфизмы алгебры L индуцированы допустимыми автоморфизмами алгебры O(F), сохраняющими соответствующую форму ω с точностью до множителя из поля K.

Канонический вид неальтернирующих гамильтоновых форм приведен в [9, 23].

Литература

1. Кострикин А.И., Шафаревич И.Р. Градуированные алгебры Ли конечной характеристики // Изв. АН СССР. Сер.матем. 1969. Т.33, № 2. С. 251–322.
2. Lin Lei. Non-alternating Hamiltonian algebra P(n,m) of characteristic two // Communications in Algebra. 1993. V.21, No.2. P. 399–411.
3. Kaplansky I. Some simple Lie algebras of characteristic 2 // Lecture Notes in Math. // 1982. V.933. P. 127–129.
4. Bouarrouj S., Grozman P., Lebedev A., Leites D. Divided power (co)homology. Presentation of simple finite dimensional modular superalgebras with Cartan matrix // Homology, Homotopy Appl. 2010. V.12, No. 1. P. 237–248.
5. Lebedev A. Analog of ortogonal, Hamiltonian, Poisson and contact Lie superalgebras in characteristic 2 // J. Nonlin. Math. Phys. 2010. V.17, No. 1. P. 399–411.
6. Kuznetsov M.I., Kondrateva A.V., Chebochko N.G. Non-alternating Hamiltonian Lie algebras in characteristic 2. I. URL: http://arxiv.org/abs/1812.11213 (дата обращения: 2018).
7. Кузнецов М.И., Кондратьева А.В., Чебочко Н.Г. О гамильтоновых алгебрах Ли характеристики 2 // Матем. журнал. 2016. Т.16, № 2. С. 54–65.
8. Kondrateva A.V. Non-alternating Hamiltonian Lie algebras in three variables // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2021. V.42, No. 12. P. 2841–2853.
9. Кондратьева А.В., Кузнецов М.И., Неальтернирующие гамильтоновы формы над алгеброй разделенных степеней в характеристике 2 // Изв. вузов. Матем. 2023. Т.6. С. 95–100.
10. Кузнецов М.И., Кириллов С.А. Гамильтоновы дифференциальные формы над алгеброй разделенных степеней // УМН . 1986. Т.41, № 2. С. 205–206.
11. Кац В.Г., Описание фильтрованных алгебр Ли, с которыми ассоциированы градуированные алгебры Ли картановского типа // Изв. АН СССР, Сер.Матем. 1974. Т.38, № 4. С. 800–834.
12. Benkart G.M., Gregory T.B., Osborn J.M., Strade H., Wilson R.L., Isomorphism classes of Hamiltonian Lie algebras // Lecture Notes in Math. 1989. V.1373, P. 42–57.
13. Скрябин С.М. Классификация гамильтоновых форм над разделенными степенями // Матем.сб. 1991. Т.69. С. 121–141.

14. Скрябин С.М. Нормальные формы симплектических и контактных форм над алгебрами разделенных степеней. URL: https://arxiv.org/abs/1906.11496v1 (дата обращения: 2019).
15. Кузнецов М.И. Усеченные индуцированные модули над транзитивными алгебрами Ли характеристики p // Изв. АН СССР. Сер.матем. 1989. Т.53, № 3. С. 557–589.
16. Кузнецов М.И. Теорема вложения для транзитивных фильтрованных алгебр Ли характеристики p // Изв. вузов. Матем. 1991. Т.10. С. 43–45.
17. Скрябин С.М. Формы алгебр Ли картановского типа // Lambert Academic Publishing. 2015. ISBN-13: 978-3-659-76486-8, ISBN-10: 3659764868.
18. Кондратьева А.В., Кузнецов М.И., Классификация неальтернирующих гамильтоновых алгебр Ли характеристики 2 // Материалы международной научной конференции "Алгебра и математическая логика: теория и приложения". Казань, 2019. С. 128–129.
19. Кондратьева А.В., Кузнецов М.И., Классификация неальтернирующих гамильтоновых алгебр Ли характеристики 2 // В книге: Алгебры Ли, алгебраические группы и теория инвариантов. Тезисы докладов Девятой школы-конференции. Самара, 2021. С. 28–29.
20. Кондратьева А.В., Кузнецов М.И., Инварианты неальтернирующих билинейных форм над полем характеристики 2 // В сб.: Математическое моделирование и суперкомпьютерные технологии. Труды XXI Международной конференции. Нижний Новгород, 2021. С. 169–170.
21. Кондратьева А.В., Кузнецов М.И., Классификация неальтернирующих гамильтоновых алгебр Ли характеристики 2 // Труды математического центра им. Н.И. Лобачевского. Казань, 2022. Т.62. С. 65–67.
22. Кондратьева А.В., Кузнецов М.И., Неальтернирующие гамильтоновы формы с коэффициентами в алгебре разделенных степеней // В сб.: Математическое моделирование и суперкомпьютерные технологии. Труды XXII Международной конференции. Сер. "Суперкомпьютерные дни в России". Нижний Новгород, 2022. С. 37–39.

ПРИМЕНЕНИЕ БИБЛИОТЕКИ ФУНКЦИОНАЛЬНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ ДЛЯ ПЕРЕНОСА ЧИСЛЕННЫХ ЗАДАЧ НА ГРАФИЧЕСКИЕ УСКОРИТЕЛИ CUDA

М.М. Краснов, О.Б. Феодоритова

Институт прикладной математики им. М.В.Келдыша РАН

Современные графические ускорители (GPU) позволяют существенно ускорить выполнение численных задач. Однако перенос программ на графические ускорители является непростой задачей. Иногда перенос программ на такие ускорители осуществляется путём практически полного их переписывания (например, при использовании технологии OpenCL). При этом возникает непростая задача поддержки двух независимых исходных кодов. Однако, графические ускорители CUDA, благодаря разработанной компанией NVIDIA технологии, позволяют иметь единый исходный код как для обычных процессоров (CPU), так и для CUDA. Машинный код, генерируемый при компиляции этого единого текста, зависит от того, каким компилятором он компилируется (обычным, таким, как gcc, icc и msvc, или компилятором для CUDA, nvcc). Однако, в этом едином исходном коде нужно каким-то образом указать компилятору, какие части этого кода нужно распараллеливать на общей памяти. Для CPU это обычно делается с помощью OpenMP и специальных прагм компилятору. Для CUDA распараллеливание делается совершенно по-другому. Применение разработанной авторами библиотеки функционального программирования позволяет скрыть использование того или иного механизма распараллеливания на общей памяти внутри библиотеки и сделать пользовательский исходный код полностью независимым от используемого вычислительного устройства (CPU или CUDA). В настоящем докладе показывается, как это можно сделать.

Ключевые слова: C++, библиотека функционального программирования, CUDA, OpenMP, OpenCL.

1. Введение

В последние годы всё большее распространение получают графические ускорители (GPU), используемые в качестве вычислительных устройств для численных расчётов. Такие ускорители устанавливаются на многих вычислительных кластерах, в частности, в списке TOP500 самых производительных суперкомпьютеров от июня 2021 г. (JUNE 2021) в первой десятке шесть используют графические ускорители от компании NVIDIA [1]. Скорость численных расчётов на таких ускорителях может быть во много раз выше, чем на CPU (по опыту авторов, ускорение может достигать 10-20 раз), поэтому перенос на графические ускорители программ, реализующих численные методы, является чрезвычайно актуальной задачей. Наверное, существуют задачи, которые на GPU можно решить, а без них это проблематично (никто не хочет ждать окончания расчётов несколько лет).

Однако перенос существующей программы на GPU является непростой задачей. Возможно, идеальный вариант – сразу писать программу так, чтобы она могла считаться на любых вычислителях. В любом случае первым встаёт вопрос – какую технологию работы на GPU использовать? В настоящий момент существует две основных технологии – это OpenCL (открытый стандарт для гетерогенных систем) [2] и CUDA – разработка компании NVIDIA для своих графических ускорителей [3]. Каждая из этих технологий имеет свои преимущества и недостатки. Главное преимущество OpenCL – открытый стандарт. Программа, использующая OpenCL, будет работать на любом вычислительном устройстве, поддерживающем этот стандарт, в том числе на GPU от NVIDIA и от AMD, процессорах Intel Xeon Phi с технологией Intel MIC и даже на обычных CPU. Главным недостатком этой технологии является то, что текст программы, работающем на устройстве (ядра, kernel), компилируется не предварительно, как обычно, а уже при работе основной (host) программы и часто хранится в отдельных файлах (с

расширением .cl). Таким образом, исходный код программы возникает в двух экземплярах: для CPU, который компилируется обычным компилятором и является частью основной программы, и текст для OpenCL в отдельных файлах, и при изменениях в алгоритмах правки надо вносить в оба места. Преимущества и недостатки технологии CUDA являются зеркальным отражением недостатков и преимуществ OpenCL. CUDA работает только на GPU от NVIDIA. С другой стороны, в CUDA мы имеем единый исходный текст, который компилируется предварительно и является частью основной программы (в том числе и код, который будет исполняться на GPU).

Мы выбираем технологию CUDA. Наш главный аргумент состоит в том, что в (нашей) реальной жизни мы сталкиваемся исключительно с устройствами от NVIDIA. GPU от AMD и процессоры Intel Xeon Phi достаточно экзотичны, и хотя нам и встречались, но реально неактуальны. Поэтому недостаток CUDA недостатком для нас не является, а её преимущество остаётся.

Следующая проблема состоит в том, что распараллеливание на общей памяти на CPU и на GPU делается совершенно по-разному. Если мы хотим получить единый текст, который должен компилироваться и для CPU и для CUDA, то в тех местах, где должно быть распараллеливание, придётся писать разный код (например, с помощью конструкции #ifdef), что неудобно. И тут возникла идея воспользоваться ранее написанной одним из авторов статьи библиотекой функционального программирования для языка C++ [4]. При использовании этой библиотеки всю специфику вычислительного устройства (CPU или CUDA) можно поместить внутрь библиотеки, и пользовательский исходный код останется платформонезависимым.

Настоящая статья состоит из трёх основных частей: краткое введение в функциональное программирование (в объёме, необходимом для понимания остального текста), краткое описание библиотеки функционального программирования funcprog и описание применения этой библиотеки для решения численных задач.

2. Краткое введение в функциональное программирование

В функциональном программировании центральным объектом является (как это и следует из названия) функция. Функции являются полноправными участниками вычислительного процесса, такими же, какими при обычных вычислениях являются числа. Это значит, что функция может быть передана как параметр другой функции и может быть возвращена как результат работы функции. Функцию можно вычислить, так же, как при обычных вычислениях можно вычислить число. Простой пример – композиция двух одноместных функций, которая возвращает новую одноместную функцию, вызывающую последовательно обе функции. В специализированных функциональных языках программирования (таких, как Lisp или Haskell) такие возможности встроены в язык, в то время, как реализация композиции функций на языке C++ является нетривиальной задачей, требующей специальных ухищрений. Хотя надо заметить, что в последние годы язык C++ стремительно развивается, в том числе и в сторону функционального программирования. В частности, появилась монадная операция and_then (аналог mbind) и каррирование (bind, bind_front, bind_back). Примеры будут приводится на языке Haskell, так как этот язык позволяет записывать многие вещи максимально кратко и в то же время понятно.

2.1. Принципы функционального программирования

Функциональное программирование имеет ряд особенностей по сравнению с императивным программированием, которые можно сформулировать в виде нескольких принципов. Некоторые из этих принципов являются обязательными для функционального программирования и поддерживаются всеми языками и библиотеками функционального программирования, а другие – опциональными, то есть в некоторых языках и библиотеках функционального программирования могут отсутствовать. По тому, насколько полно эти принципы реализованы в языке или библиотеке функционального программирования, можно судить о степени её «функциональности».

Первый и главный обязательный принцип, уже упоминавшийся выше – это то, что функция является полноценным участником вычислительного процесса и может быть как передана в качестве параметра, так и возвращена как результат работы некоторой функции.

Другой обязательный принцип – наличие лямбда-выражений. Лямбда-выражение – это такое выражение в языке, результатом которого является функция. Собственно, первый принцип без второго практически невозможен. Как правило, функция, возвращающая в качестве результата функцию, фактически возвращает лямбда-выражение.

Остальные принципы функционального программирования не столь важны и часто отсутствуют, но их наличие существенно повышает возможности языка или библиотеки. Опишем основные из них.

«Чистые» функции. Под «чистотой» функции в функциональном программировании подразумевается отсутствие у функции побочных эффектов. Это значит, что результат, возвращаемый функцией, зависит только от переданных аргументов и больше ни от чего.

Следующий принцип функционального программирования – неизменяемые (immutable) переменные. Это как если бы в Вашей программе на C++ все переменные имели бы модификатор const (const int i = 5;). Переменные есть, но им что-то присвоить можно только один раз при создании. Именно с такими переменными работают все функциональные языки программирования (Haskell, Lisp). Этот принцип позволяет гарантировать «чистоту» функции (функция не меняет значение ни одной переменной (потому что не может), значит, она «чистая»).

Каррирование. Названо по фамилии американского математика и логика Хаскелла Карри (а по его имени назван язык программирования Haskell). Принцип каррирования состоит в том, что при неполном указании параметров функции ошибки не происходит, а вместо этого генерируется функция с меньшим (равным числу недостающих параметров) числом параметров. Реализовано в многих современных функциональных языках программирования (в частности, в языке Haskell). Каррирование позволяет функцию с несколькими аргументами рассматривать как набор функций с одним аргументом.

Ленивые вычисления. Этот принцип в языке Haskell является прямым следствием принципа каррирования. В языке Haskell каррирование «идёт до конца». Это значит, что даже при передаче всех параметров функции фактического вызова не происходит. При применении каждого следующего параметра порождается функция с меньшим на единицу числом параметров, и после применения всех параметров получается функция без параметров. Именно эта функция без параметров передаётся в качестве аргумента. То есть фактически любые вычисления в языке Haskell – это вычисления функции.

η-редукция (эта редукция, или η-преобразование). Пусть мы хотим написать функцию с одним параметром – списком чисел, возвращающую список синусов этих чисел. Текст этой функции на языке Haskell очевидный:

```
mapsin lst=map sin lst
```

Из принципа каррирования следует, что если мы опустим второй параметр при вызове функции map sin lst, то есть напишем просто map sin, то мы получим функцию с одним параметром, принимающим в качестве этого параметра список чисел и возвращающую список синусов этих чисел, то есть фактически функцию mapsin. То есть mapsin эквивалентно map sin. Принцип η-редукции гласит, что в подобных случаях последний параметр в определении функции можно опускать, то есть определение функции mapsin можно записать короче:

```
mapsin=map sin
```

Композиция функций. Композиция функций настолько важна в функциональном программировании, что в языке Haskell эта операция максимально упрощена. Обычно рассматривают композицию одноместных функций (назовём их f и g), в языке Haskell она записывается так:

```
(f . g) x = f (g x)
map (exp . sin) [1,2,3] -- Пример использования
```

2.2. Функторы, аппликативы и монады

Функторы. Пусть у нас есть некоторый контейнер, хранящий какое-то количество значений, например, список или объект класса Maybe. Теперь поставим задачу: применить обычную одноместную функцию (например, sin) к значениям в контейнере. Как это сделать со списками, известно – нужно применить функцию map. Но как это сделать с типом Maybe, и в общем случае – как это сделать с данными в произвольном контейнере? Универсальный подход состоит в

том, чтобы доверить это ответственное дело самому контейнеру. Для этого в языке Haskell определён специальный класс Functor, в котором продекларирована функция fmap:

```
class Functor f where
  fmap :: (a -> b) -> f a -> f b
  (<$>) = fmap
```

Оператор (<$>) – синоним функции fmap. Это оператор применения функции к функтору. Он похож на оператор применения функции к обычному значению ($). Прототип функции fmap можно записать в другом эквивалентном виде (это следует из правоассоциативности стрелки вправо):

```
fmap :: (a -> b) -> (f a -> f b)
```

Функтором называется тип, реализующий класс Functor. Таким образом, функцию fmap можно рассматривать как функцию с одним параметром, принимающим функцию, принимающую и возвращающую обычные значения, и преобразующую её в функцию, принимающую и возвращающую функторы. Любой тип данных может объявить себя функтором, реализовав для себя экземпляр класса Functor и функцию fmap. Любая реализация функтора должна удовлетворять двум функторным законам:

```
1.    fmap id = id                    -- 1st functor law
2.    fmap (g . f) = fmap g . fmap f -- 2nd functor law
```

Здесь id – функция, возвращающая свой аргумент: id x=x. Первый закон гласит: применение функции id к функтору не должно менять функтор, так же, как применение этой функции к обычному значению его не меняет. Второй закон – это распределительный закон функторной операции относительно композиции функций.

Аппликативы. Если стоит задача применить функцию с двумя аргументами к двум контейнерам (например, просуммировать два списка), то функционала класса Functor будет недостаточно. Для решения этой задачи предназначен другой класс – аппликативный функтор (аппликатив). Вот определение класса Applicative:

```
class Functor f => Applicative f where
  pure  :: a->f a
  (<*>) :: f (a -> b) -> f a -> f b
  liftA2 :: (a->b->c)->f a->f b->f c
  liftA2 f x y = f <$> x <*> y
```

Таким образом, в каждом аппликативе должны быть реализованы две основные операции: функция pure, помещающая обычное значение в «чистый» аппликатив, и оператор (<*>), принимающий в качестве первого параметра функцию, помещённую в аппликатив, и второго параметра – значение, помещённое в тот же аппликатив, и возвращающий результат в том же аппликативе.

Если мы посмотрим на прототип и реализацию функции liftA2, то мы увидим, что она передаёт функцию с двумя параметрами в оператор (<$>), который принимает функцию с одним параметром. Но противоречия тут нет, так как функцию с прототипом a->b->c мы можем записать так: a->(b->c), то есть как функцию с одним параметром, возвращающую функцию. Тогда оператор (<$>) нам как раз и вернёт функцию b->c, помещённую в функтор, которая затем передаётся в оператор (<*>). По аналогии с функцией fmap, прототип функции liftA2 мы можем записать так:

```
liftA2 :: (a->b->c)->(f a->f b->f c)
```

то есть рассматривать её как функцию с одним аргументом, принимающую функцию, работающую с обычными значениями и возвращающую функцию, работающую с функторами, «поднимающую» функцию с двумя аргументами (отсюда и её название) в аппликатив. По аналогии с функцией liftA2 можно написать функцию, «поднимающую» в аппликатив функцию с тремя (и любым другим числом) аргументами:

```
liftA3 :: Applicative f => (a->b->c->d)->f a->f b->f c->f d
liftA3 f x y z = f <$> x <*> y <*> z
```

Любая реализация аппликатива должна удовлетворять аппликативным законам:

```
1.    pure id <*> v = v                            -- Identity
2.    pure f <*> pure x = pure (f x)               -- Homomorphism
```

```
3.    u <*> pure y = pure ($ y) <*> u              -- Interchange
4.    pure (.) <*> u <*> v <*> x = u <*> (v <*> x) -- Composition
```

Вот как реализованы аппликативны для списков и Maybe:

```
instance Applicative [] where
  pure x    = [x]
  fs <*> xs = [f x | f <- fs, x <- xs]

instance Applicative Maybe where
  pure = Just -- η-редукция
  Just f  <*> m = fmap f m
  Nothing <*> _ = Nothing
```

Монады. Напишем «безопасные» функции safe_sqrt и safe_log:

```
safe_sqrt x=if x<0 then Nothing else Just(sqrt x)
safe_log x=if x<=0 then Nothing else Just(log x)
```

Эти функции возвращают результат типа Maybe, причём если аргумент функции принадлежит области её определения, то возвращается значение Just value, а иначе – Nothing. Пусть теперь мы хотим вычислить квадратный корень от логарифма числа. Для обеих операций у нас есть «безопасные» функции, возвращающие результат типа Maybe и проверяющие, что значение аргумента принадлежит области определения функции. Как нам теперь применить функцию safe_sqrt к результату функции safe_log? Функционала функтора и аппликатива для этого недостаточно. Для этой цели служат монады. Монады можно рассматривать как дальнейшее продолжение аппликатива, они предназначены для построения цепочек монадных вычислений. Каждая монада имеет две основных функции: mreturn (в языке Haskell return) и mbind (в языке Haskell оператор (>>=). Функция mreturn аналогична функции pure для аппликативов (фактически для большинства монад mreturn определяется как pure), а операция mbind имеет следующее определение:

```
(>>=) :: (Monad m) -> m a -> (a -> m b) -> m b
```

Она принимает в качестве параметров монаду и функцию, принимающую обычное (не монадное) значение и возвращающую монадное значение (возможно, другого типа, но в той же монаде). Будем называть такие функции монадными. Функции safe_log и safe_sqrt – примеры монадных функций.

Функции mreturn и mbind должны удовлетворять трём монадным законам. Для того чтобы их сформулировать, введём операцию монадной композиции (mcompose или оператор (>=>) в языке Haskell). Она определяется следующим образом:

```
  (>=>) :: f >=> g = \x -> (f x >>= g)
```

Оба операнда монадной композиции и её результат – монадные функции. Следовательно, монадную композицию можно рассматривать как групповую операцию в пространстве таких функций. В терминах этой групповой операции монадные законы формулируются так:

```
1.    mreturn >=> f == f
2.    f >=> mreturn == f
3.    (f >=> g) >=> h == f >=> (g >=> h)
```

Другими словами, функции mreturn и mbind должны быть определены так, чтобы, во-первых, функция mreturn являлась единичным элементом (левым и правым) монадной композиции (первые два закона), и, во-вторых, монадная композиция должна быть ассоциативной (третий закон). Покажем, как определена монадная операция для списков и Maybe:

```
instance Monad [] where
  xs >>= f = [y | x <- xs, y <- f x]
```

```
instance Monad Maybe where
  (Just x) >>= k = k x
  Nothing  >>= _ = Nothing
```

Теперь квадратный корень от логарифма можно вычислить так:

```
safe_log   5  >>= safe_sqrt -- Just 1.2686362411795196
safe_log (-5) >>= safe_sqrt -- Nothing
safe_log 0.5  >>= safe_sqrt -- Nothing
```

Если где-то в цепочке вычислений возникает ошибка, то происходит быстрый выход из всей цепочки, остальные функции фактически не вычисляются.

3. Библиотека функционального программирования

3.1. Общее описание библиотеки

При реализации библиотеки функционального программирования для языка C++ funcprog ставилась задача написать библиотеку, с помощью которой на языке C++ можно было бы писать в стиле, близком к стилю языка Haskell.

Важный вопрос – что такое функция с точки зрения этой библиотеки? В первоначальной версии библиотеки под функцией подразумевался объект класса std::function. Этот вариант нас теперь не устраивает, так как мы хотим, чтобы функция исполнялась на графическом ускорителе, а объект класса std::function может исполняться только на CPU (в частности, потому, что в её реализации используются виртуальные функции, которые на GPU непереносимы). Это не может быть и обычная функция, так как её невозможно передать как параметр из CPU в CUDA, так как обычную функцию можно передать только по адресу, а адреса из CPU в CUDA передавать нельзя. Было принято решение считать функцией любой функциональный объект (имеющий функциональный оператор ()), в частности, это может быть лямбда-выражение. При этом для того, чтобы этот объект можно было передавать в CUDA, этот функциональный оператор должен быть помечен ключевым словом __device__. Недостатком такого подхода является то, что в метаданные функции попадает не только её прототип (типы параметров и возвращаемое значение), но и реализация (класс объекта) – такова плата за возможность переноса на CUDA. Вот как реализована функция:

```
template<typename FuncType, typename FuncImpl> struct function2;

template<typename Ret, typename... Args, typename FuncImpl>
struct function2<Ret(Args...), FuncImpl> {
  using result_type = Ret;
  function2(FuncImpl const& impl) : impl(impl){}
  result_type operator()(Args... args) const { return impl(args...); }
private: FuncImpl const impl;
};
```

Приведём пример работы с этой библиотекой:

```
double d=(_([](double x){return x*x;}) & _([](double x){return x+1;}))(5);
//36
```

В этом примере мы создали две функции, сделали их композицию (с помощью оператора &) и вызвали получившуюся составную функцию с параметром 5. В результате получили число 36.

В библиотеке funcprog достаточно полно реализовано каррирование функций. Для этого в библиотеке реализован оператор применения аргумента к функции с помощью оператора сдвига влево <<. При этом создаётся новая функция, имеющая на один параметр меньше. В частности, если исходная функция имела единственный параметр, то создастся функция без параметров. В библиотеке имеется также функция invoke_f0, которой можно передать любую функцию. Если переданная функция без параметров, то она будет вызвана и вернётся результат её исполнения. Если же переданная функция имеет параметры (один или больше), то будет просто возвращена эта функция. В библиотеке имеется также метафункция remove_f0, принимающая в качестве параметра шаблона тип функции. Если функция без параметров, то в переменной type вернётся тип возвращаемого функцией значения, а если параметры есть, то тип самой функции.

3.2. Реализация функторов, аппликативов и монад

Реализация функторов, аппликативов и монад в библиотеке funcprog в чём-то похожа на реализацию этих понятий в языке Haskell. Любой класс может объявить себя функтором, аппликативом или монадой. Для этого достаточно для этого класса реализовать специализацию классов соответственно Functor, Applicative и Monad. В сам класс никаких изменений вносить не требуется.

Любой функтор или монада являются типом с одним параметром. В языке C++ типы с параметром реализуются с помощью шаблонов классов. Рассмотрим определение функтора на примере класса Maybe. Класс Maybe в библиотеке funcprog определён так:

```
template<typename A> struct Maybe;
```

Шаблон класса типом не является, и его нельзя передать как параметр шаблона другого класса. Поэтому определяется ещё один класс (без шаблона) с именем _Maybe (с подчерком впереди). Это уже настоящий класс, его можно передавать как параметр шаблона:

```
struct _Maybe {};
```

Шаблон класса Maybe наследуется от этого класса:

```
template<typename A>
struct Maybe : std::optional<A>, _Maybe, {
  ...
};
```

Специализации классов Functor, Applicative и Monad пишутся именно от этого класса _Maybe:

```
template<> struct Functor<_Maybe>{
  ...
};
```

Внутри специализации класса Functor нужно определить статическую функцию fmap. Специализации классов Applicative и Monad определяются аналогично. Для аппликатива методы называются pure и apply, а для монады – mreturn и mbind. При реализации статических методов этих классов нужно не забывать про выполнение функторных, аппликативных и монадных законов.

Заметим также, что в библиотеке funcprog в качестве функторного оператора используется оператор деления, а в качестве аппликативного – умножение.

4. Применение библиотеки для численных методов

При решении численных задач (например, задач газовой динамики или задачи теплопроводности) в решаемой области строится некоторая сетка (регулярная или чаще нерегулярная). На некоторых элементах этой сетки (например, узлах или ячейках) создаётся так называемая сеточная функция, в которой хранятся некоторые физические величины в элементах сетки. Сеточных функций, как правило, две – на предыдущем шаге по времени и на текущем. Основной цикл работы программы идёт по времени, на каждом шаге по времени по значениям на предыдущем шаге вычисляются значения на текущем шаге. Этот цикл всегда выполняется последовательно. В конце шага вычисленные новые значения копируются из сточной функции для текущего шага в сеточную функцию на предыдущем шаге (иногда эти сеточные функции просто меняются местами). Внутри тела основного цикла имеется цикл (один или несколько) по сеточной функции, в котором для каждого значения индекса сеточной функции вычисляются новые значения физических переменных. Если метод явный (при котором новые значения физических переменных зависят только от старых и не зависят от новых значений в соседних элементах сетки), то вычислять значения в разных элементах сетки можно независимо друг от друга, в частности, эти вычисления можно вести параллельно. Таким образом, внутренние циклы можно (и нужно) распараллеливать на общей памяти. При расчётах на CPU распараллеливание циклов делается, как правило, с помощью OpenMP. При расчётах на CUDA методы распараллеливания свои, и они сильно отличаются от OpenMP. Чтобы скрыть метод распараллеливания от прикладного программиста-математика, реализующего численный метод, предлагается ис-

пользовать библиотеку функционального программирования funcprog так, как это описывается далее.

4.1. Сеточные выражения и сеточные функции

Введём понятие сеточного выражения. Это объект, определённый на всех элементах сетки, то есть к у любого объекта, являющегося сеточным выражением, можно узнать, чему равно его значение для любого индекса сетки. Частным случаем сеточного выражения является сеточная функция, которая свои значения просто хранит в памяти и их, если нужно, возвращает. Для сеточных выражений определяется шаблон класса grid_expression, от которого должны наследоваться все классы объектов, являющихся сеточными выражениями (в частности, класс grid_function также пронаследован от класса grid_expression). Таким образом, фраза «объект является сеточным выражением» означает, что класс этого объекта пронаследован от класса grid_expression. При таком наследовании используется шаблон проектирования CRTP (Curiously Recurring Template Pattern) [5], при котором в базовый класс в качестве параметра шаблона передаётся конечный класс. Про этот шаблон и другие методы метапрограммирования можно прочитать в книгах [6,7]. Про шаблоны выражений можно также прочитать в [8].

Любое сеточное выражение можно присвоить сеточной функции. Этот оператор присваивания проходит по всем индексам сеточной функции, которой присваивается сеточное выражение, для каждого индекса запрашивает у сеточного выражения его значение и присваивает это значение сеточной функции по данному индексу. Этот оператор присваивания подразумевает, что значения для разных индексов можно вычислять независимо друг от друга, и значит их можно вычислять параллельно. Именно в этом операторе присваивания выполняется тот самый внутренний цикл по элементам сеточной функции. Метод распараллеливания этого цикла выбирается оператором присваивания в зависимости от того, каким компилятором компилируется программа. Если это компилятор для CUDA (определена переменная препроцессора __CUDACC__), то распараллеливание осуществляется с помощью CUDA, иначе – с помощью OpenMP. Таким образом, метод распараллеливания скрыт от прикладного программиста внутри этого оператора присваивания. Покажем, как примерно реализован этот оператор присваивания для CPU:

```
template<class GEXP>
void operator=(grid_expression(GEXP, typename GEXP::proxy_type) const&
gexp0){
  GEXP const& gexp = gexp0();
#pragma omp parallel for
  for(size_t i = 0; i < size(); ++i)
    (*this)[i] = gexp[i];
}
```

Говоря про сеточные функции, нужно упомянуть ещё один аспект. GPU может работать только со своей памятью, это значит, что при работе на GPU сеточная функция должна память под свои данные запрашивать в памяти CUDA. С этим также проблем нет. Сеточные функции устроены так, что при компиляции на CUDA они запрашивают память в CUDA, иначе – в памяти CPU.

4.2. Объекты-заместители (proxy)

Шаблон класса сеточного выражения grid_expression определён следующим образом:

```
template<class E, class _Proxy = E>
struct grid_expression;
```

Здесь E – конечный класс, а _Proxy – класс заместителя. По умолчанию (если он не указан), класс заместителя совпадает с конечным классом. Он нужен для создания копии объекта. Дело в том, что единственный способ передачи параметров из памяти основного процессора в память CUDA – это передача по значению (то есть делается копия параметра). Передача по адресу и ссылке невозможна. По значению можно передавать только переменные простых типов (числа и указатели) и объекты классов, содержащие только простые типы. Кроме того, эти объ-

екты не должны содержать виртуальных методов и вызываемые в них методы должны быть доступны из CUDA. Далеко не все объекты удовлетворяют всем этим требованиям. Если же такой объект всё-таки нужно передать из CPU в CUDA, то для него можно создать объект-заместитель, удовлетворяющий перечисленным требованиям и хранящим все основные данные из основного объекта. Есть и другая причина того, почему не всегда можно хранить ссылки и указатели на объекты даже на CPU. Дело в том, что в сложных выражениях могут появляться временные безымянные переменные, у которых нет постоянной памяти, и ссылки и указатели на которые сохранять нельзя. Такие объекты необходимо копировать. Всегда копировать объекты тоже нельзя, так как бывают «большие» объекты (например, вектора данных), которые при копировании делают копию этих данных. Общее правило следующее. Если объект «маленький» и не имеет виртуальных методов, то его, как правило, можно копировать, и класс-заместитель не нужен, иначе такой класс необходим.

4.3. Сеточные выражения как функторы, аппликативы и монады

Сеточные выражения можно рассматривать как контейнеры (особенно это справедливо для сеточных функций). В библиотеке funcprog контейнеры (списки и класс Maybe) являются функторами, аппликативами и монадами. Это даёт возможности применять к значениям, хранящимся в них, обычные функции (свойство функторов). Сделаем сеточное выражение также функтором, аппликативом и монадой, чтобы и к сеточным выражениям можно было применять функции. Чтобы понять, как это можно сделать, рассмотрим типичный цикл, вычисляющий новое значение сеточной функции по старой:

```
for(size_t i = 0; i < N; ++i)
  f_new[i] = calculate(f_old[i]);
```

здесь calculate – функция, вычисляющая новое значение в ячейке по старому. Ей в качестве параметра передаётся старое значение в ячейке. В новом подходе мы хотим, чтобы в этом случае можно было написать:

```
f_new = _(calculate) / f_old;
```

Если же для вычислений требуются ещё несколько сеточных функций (назовём их f2 и f3), то вместо

```
for(size_t i = 0; i < N; ++i)
  f_new[i] = calculate(f_old[i], f2[i], f3[i]);
```

мы могли бы написать:

```
f_new = _(calculate) / f_old * f2 * f3;
```

то есть для первой сеточной функции мы применили свойство функтора, а для последующих – аппликатива. Если мы хотим в функцию передать ещё дополнительно некоторое постоянное значение (не зависящее от индекса цикла), то чтобы можно было бы написать вместо:

```
for(size_t i = 0; i < N; ++i)
  f_new[i] = calculate(f_old[i], some_value);
```

что-то типа:

```
f_new = _(calculate) / f_old * pure(some_value);
```

Таким образом, результатом применения функции к сеточному выражению (или к нескольким сеточным выражениям в случае аппликатива) должно быть также сеточное выражение, то есть у него можно запросить значение по индексу (должен быть реализован оператор []). Сеточными выражениями, помимо сеточных функций, являются также результаты применения функций к сеточным выражениям как к функторам и монадам. Кроме того, сумма и разность двух сеточных выражений, а также произведение и частное сеточного выражения и числа, также являются сеточными выражениями.

Пусть теперь f – применяемая функция, a gexp – сеточное выражение.

Функтор. Для функтора мы даём следующее определение (на псевдо-Haskell-е):

```
(fmap f gexp)[i] = f gexp[i]
```

Теорема 1 (о функторе). Определённая выше функция fmap удовлетворяет функторным законам. Теоремы (эта и следующие две) доказываются методом под названием «equational reasoning» (эквациональные рассуждения). Правая и левая части равенства путём эквивалентных

преобразований приводятся к одному и тому же выражению, тем самым доказывается их равенство.

Аппликатив.

```
(pure val)[i] = val
(apply gexp_f gexp)[i] = gexp_f[i] gexp[i]
```

Теорема 2 (об аппликативе). Определённые выше функции pure и apply удовлетворяют аппликативным законам.

Монада.

Монадная функция mreturn определена так же, как и функция pure:

```
(mreturn val)[i] = val
```

Монадная функция mbind (в языке Haskell и в библиотеке funcprog оператор >>=) принимает монаду (в нашем случае сеточное выражение) и функцию, принимающую обычное (не монадное) значение и возвращающую монаду (сеточное выражение). Определим функцию mbind следующим образом:

```
(mbind gexp f)[i] = (f gexp[i])[i]
```

Теорема 3 (о монаде). Определённые выше функции mreturn и mbind удовлетворяют монадным законам.

4.4. Пример программы

Приведём пример программы, вычисляющий функцию axpy из библиотеки BLAS:

```
template<typename T>
void axpy(T a, math_vector<T> const& x, math_vector<T> &y){
    g(y) = _([] __DEVICE __HOST (T a, T xi, T &yi, size_t /*i*/){
        yi += a * xi;
    }) / p(a) * g(x);
}

int main(){
    size_t const N = 10;
    math_vector<double> x(N, 2), y(N, 3);
    axpy(5., x, y);
    std::cout << y[0] << std::endl; // 13
}
```

Эта программа компилируется без каких-либо изменений для CPU и для CUDA. Вначале создаются два вектора данных длиной 10 (x и y) и инициализируются начальными значениями (2 для x и 3 для y). Для CPU класс math_vector эквивалентен классу std::vector (данные размещены в памяти основного процессора), а для CUDA эквивалентен классу thrust::device_vector (данные размещены в памяти CUDA). Функция g превращает вектор в сеточную функцию, а функция p вызывает функцию pure из аппликатива сеточного выражения. Оператор присваивания в функции axpy запускает цикл по сеточной функции y, присваивая каждому её элементу соответствующий элемент сеточного выражения в правой части оператора присваивания. Этот цикл для CPU распараллеливается с помощью OpenMP, а для CUDA – с помощью CUDA. Вся специфика этого распараллеливания спрятана от прикладного программиста в этом операторе присваивания внутри библиотеки.

Литература

1. Краснов М.М. Библиотека функционального программирования для языка C++. Программирование, 2020 г., № 5, с. 47-59. DOI: 10.31875/S0132347420050040
2. Coplien J.O. Curiously recurring template patterns. C++ Report, February 1995, pp. 24–27.
3. David Abrahams, Aleksey Gurtovoy. C++ Template Metaprogramming. Addison-Wesley, 2004, 400 с. ISBN 978-0-321-22725-6.
4. Краснов М.М. Метапрограммирование шаблонов C++ в задачах математической физики. М.: ИПМ им. М.В. Келдыша, 2017. 84 с. DOI: 10.20948/mono-2017-krasnov
5. Veldhuizen T. Expression Templates. C++ Report, Vol. 7 № 5, June 1995, pp. 26-31.

6. Краснов М.М. Применение функционального программирования при решении численных задач // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2019. № XXX. 36 с. DOI: 10.20948/prepr-2018-245.
7. Bjarne Stroustrup. The C++ Programming Language, Fourth Edition. Addison-Wesley, 2013. ISBN 978-0-321-56384-2, 1368 c.
8. Bjarne Stroustrup. Programming: Principles and Practice Using C++ (2nd Edition). Addison-Wesley, 2014.

О КАЧЕНИИ ТЯЖЕЛОГО ОДНОРОДНОГО ШАРА ПО ПОВЕРХНОСТИ ВРАЩЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА И ПО ТОРУ

А.С. Кулешов, А.А. Шишков

Московский госуниверситет им. М.В. Ломоносова

В данной работе рассматривается задача о качении тяжелого однородного шара по абсолютно шероховатой поверхности вращения. Обычно при рассмотрении этой задачи принято задавать в явном виде не поверхность, по которой катится шар, а поверхность, по которой при качении движется центр шара. В работе доказывается, что если поверхность, по которой движется центр шара, представляет собой невырожденную поверхность вращения второго порядка, то в таком случае задача о качении шара по поверхности вращения может быть проинтегрирована в квадратурах. Также показано, что если центр шара движется по поверхности тора, то решение задачи выражается через функции Хейна.

Ключевые слова: качение без проскальзывания, однородный шар, поверхность вращения второго порядка, интегрируемость в квадратурах, функция Хейна.

1. Постановка задачи

Рассмотрим задачу о качении однородного шара по произвольной выпуклой абсолютно шероховатой поверхности под действием сил, результирующая которых проходит через центр масс G шара, совпадающий с его геометрическим центром [1–3]. Для описания движения шара введем подвижную систему координат $Gx_1x_2x_3$, ось Gx_3 которой направлена по нормали к опорной поверхности. Направления осей Gx_1 и Gx_2 определим позднее. Обозначим через $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ единичные базисные векторы осей Gx_1, Gx_2 и Gx_3 соответственно. Пусть $\boldsymbol{\Omega} = \theta_1\mathbf{e}_1 + \theta_2\mathbf{e}_2 + \theta_3\mathbf{e}_3$ – угловая скорость выбранной подвижной системы координат; $\mathbf{v}_G = u\mathbf{e}_1 + v\mathbf{e}_2 + w\mathbf{e}_3$ – вектор скорости точки G (очевидно, что $w = 0$, поскольку шар не отрывается от опорной поверхности во время движения); $\boldsymbol{\omega} = \omega_1\mathbf{e}_1 + \omega_2\mathbf{e}_2 + \omega_3\mathbf{e}_3$ – угловая скорость шара. Обозначим через $\mathbf{N} = F_1\mathbf{e}_1 + F_2\mathbf{e}_2 + N\mathbf{e}_3$ силу реакции, действующую на шар со стороны опорной поверхности. Через $\mathbf{P} = X\mathbf{e}_1 + Y\mathbf{e}_2 + P\mathbf{e}_3$ обозначим результирующую силу, приложенную к центру масс шара. Пусть M – масса шара, R – его радиус, J – момент инерции шара относительно любой оси, проходящей через его центр масс. Предполагая, что положительное направление оси Gx_3 направлено наружу в сторону выпуклости опорной поверхности, запишем уравнения движения шара в векторном виде:

$$M\ \dot{\mathbf{v}}_G + M\left[\boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{v}_G\right] = \mathbf{P} + \mathbf{N}, \tag{1}$$

$$J\ \dot{\boldsymbol{\omega}} + \left[\boldsymbol{\Omega}\times J\boldsymbol{\omega}\right] = \left[\overrightarrow{GK}\times\mathbf{N}\right], \tag{2}$$

Уравнения (1) и (2) выражают, соответственно, законы изменения импульса и кинетического момента шара относительно выбранной подвижной системы координат. Здесь $\overrightarrow{GK} = -R\mathbf{e}_3$ – радиус-вектор из центра масс G шара в точку K контакта шара с опорной поверхностью. Поскольку скорость точки шара, находящейся в соприкосновении с опорной поверхностью, в каждый момент времени равна нулю, следовательно:

$$\mathbf{v}_G + \left[\boldsymbol{\omega}\times\overrightarrow{GK}\right] = 0\,. \tag{3}$$

В скалярной форме уравнения (1) – (3) записываются следующим образом:

$$M\dot{u} - M\theta_3 v = X + F_1,\quad M\dot{v} + M\theta_3 u = Y + F_2,\quad M\theta_1 v - M\theta_2 u = P + N; \tag{4}$$

$$J\dot{\omega}_1 + J\theta_2\omega_3 - J\theta_3\omega_2 = F_2R,\quad J\dot{\omega}_2 + J\theta_3\omega_1 - J\theta_1\omega_3 = -F_1R,\quad \dot{\omega}_3 + \theta_1\omega_2 - \theta_2\omega_1 = 0; \tag{5}$$

$$u - R\omega_2 = 0, \quad v + R\omega_1 = 0. \tag{6}$$

Исключая F_1, F_2, ω_1, ω_2 из уравнений (4) – (6), получаем:

$$\dot{u} - \theta_3 v = \frac{R^2 X}{J + MR^2} + \frac{JR\theta_1\omega_3}{J + MR^2}, \quad \dot{v} + \theta_3 u = \frac{R^2 Y}{J + MR^2} + \frac{JR\theta_2\omega_3}{J + MR^2}. \tag{7}$$

Центр масс G шара движется по поверхности, полученной из данной опорной поверхности смещением по нормали на расстояние, равное радиусу R шара. Направим оси Gx_1 и Gx_2 по касательным к линиям кривизны этой поверхности. Получим теперь линейное дифференциальное уравнение второго порядка, к интегрированию которого приводится решение рассматриваемой задачи.

2. Вывод основного уравнения

Пусть поверхность, по которой движется центр масс G шара, является поверхностью вращения, которая задается относительно некоторой неподвижной системы координат уравнением

$$\mathbf{r} = \big(\rho(q_1)\cos q_2,\ \rho(q_1)\sin q_2,\ \zeta(q_1)\big). \tag{8}$$

В формуле (8) через q_1, q_2 обозначены гауссовы координаты на поверхности. Поверхность вращения (8) получается, если кривую, заданную параметрически уравнениями $\rho = \rho(q_1)$, $\zeta = \zeta(q_1)$, повернуть вокруг некоторой вертикальной оси, при этом q_2 – угол поворота.

Тогда компоненты θ_1, θ_2, θ_3 угловой скорости $\mathbf{\Omega}$ системы координат $Gx_1x_2x_3$ будут равны (см. [1]):

$$\theta_1 = h_2 k_2 \dot{q}_2, \quad \theta_2 = -h_1 k_1 \dot{q}_1, \quad \theta_3 = \frac{\dot{q}_2}{h_1}\frac{dh_2}{dq_1}. \tag{9}$$

Здесь через h_1, h_2 обозначены коэффициенты Ламе данной поверхности, а через k_1, k_2 – её главные кривизны, которые вычисляются по формулам [1]:

$$h_1 = h_1(q_1) = \sqrt{\left(\frac{d\rho}{dq_1}\right)^2 + \left(\frac{d\zeta}{dq_1}\right)^2}, \quad h_2 = h_2(q_1) = \rho(q_1), \tag{10}$$

$$k_1 = k_1(q_1) = \frac{\dfrac{d^2\zeta}{dq_1^2}\dfrac{d\rho}{dq_1} - \dfrac{d\zeta}{dq_1}\dfrac{d^2\rho}{dq_1^2}}{\left(\left(\dfrac{d\rho}{dq_1}\right)^2 + \left(\dfrac{d\zeta}{dq_1}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}, \quad k_2 = k_2(q_1) = \frac{\dfrac{d\zeta}{dq_1}}{\rho\sqrt{\left(\dfrac{d\rho}{dq_1}\right)^2 + \left(\dfrac{d\zeta}{dq_1}\right)^2}}. \tag{11}$$

Компоненты скорости u и v центра масс G шара связаны с координатами q_1, q_2 и их производными соотношениями (см. [1]):

$$u = h_1\dot{q}_1, \quad v = h_2\dot{q}_2, \tag{12}$$

с учетом которых можно переписать выражения для компонент θ_1, θ_2, θ_3 угловой скорости $\mathbf{\Omega}$ следующим образом:

$$\theta_1 = k_2 v, \quad \theta_2 = -k_1 u, \quad \theta_3 = \frac{v}{h_1 h_2}\frac{dh_2}{dq_1}. \tag{13}$$

Принимая во внимание формулы (9), (12). (13), а также уравнения неголономных связей (6), из третьего уравнения системы (5) получаем:

$$\dot{\omega}_3 = \theta_2\omega_1 - \theta_1\omega_2 = -\frac{\theta_2 v}{R} - \frac{\theta_1 u}{R} = \frac{k_1 uv}{R} - \frac{k_2 uv}{R} = \frac{(k_1 - k_2)vh_1\dot{q}_1}{R}.$$

Переходя в полученном уравнении к новой независимой переменной – координате q_1, запишем данное уравнение в виде:

$$\frac{d\omega_3}{dq_1} = \frac{(k_1 - k_2)h_1}{R} v. \tag{14}$$

Поскольку движение шара происходит под действием силы тяжести, следовательно имеем $Y = 0$. С учётом этого факта и формул (9), (12), (13), из второго уравнения системы (7) находим, что

$$\dot{v} + \frac{v}{h_2}\frac{dh_2}{dq_1}\dot{q}_1 = -\frac{JRh_1k_1\dot{q}_1}{J + MR^2}\omega_3.$$

В полученном уравнении мы также перейдем к новой независимой переменной – координате q_1, в результате чего данное дифференциальное уравнение примет вид:

$$\frac{dv}{dq_1} + \frac{v}{h_2}\frac{dh_2}{dq_1} = -\frac{JRh_1k_1}{J + MR^2}\omega_3. \tag{15}$$

Система уравнений (14), (15) представляет собой систему двух линейных уравнений первого порядка относительно неизвестных v и ω_3. Решение задачи о качении шара по поверхности такой, что центр масс шара принадлежит заданной поверхности вращения, сводится к интегрированию системы уравнений (14), (15).

Немного преобразуем данную систему. Введём новые переменные V и Ω по формулам:

$$V = h_2 v = \rho(q_1)v, \quad \Omega = R\omega_3,$$

а также обозначим

$$\frac{J}{J + MR^2} = n^2 < 1.$$

Тогда система уравнений (14), (15) перепишется в виде

$$\frac{d\Omega}{dq_1} = \frac{h_1}{h_2}(k_1 - k_2)V, \qquad \frac{dV}{dq_1} = -n^2 h_1 h_2 k_1 \Omega. \tag{16}$$

Систему уравнений (16) легко привести к одному линейному дифференциальному уравнению второго порядка относительно V:

$$\frac{d^2V}{dq_1^2} - \frac{1}{h_1h_2k_1}\frac{d}{dq_1}\left[h_1h_2k_1\right]\frac{dV}{dq_1} + n^2(k_1 - k_2)h_1^2k_1V = 0. \tag{17}$$

Таким образом, задача о качении шара по неподвижной выпуклой поверхности под действием силы тяжести, в предположении, что центр масс G шара движется по заданной поверхности вращения, сводится к интегрированию уравнения (17). Коэффициенты данного уравнения определяются формой поверхности вращения, по которой движется центр шара. Можно поставить вопрос о том, для каких поверхностей вращения уравнение интегрируется в явном виде, то есть соответствующая задача приводится к квадратурам. Ниже доказано, что если при качении шара его центр движется по невырожденной поверхности второго порядка, то уравнение (17) интегрируется явно.

3. Качение шара по поверхности второго порядка

Рассмотрим задачу о качении шара по поверхности такой, что при качении центр шара движется по заданной поверхности вращения второго порядка. Будем считать, что для данной поверхности выполняется условие $k_1 \neq 0$, то есть она не является цилиндром или конусом (тот факт, что задача о качении шара по цилиндру и по конусу интегрируется в квадратурах, был доказан ещё [2]). В этом случае кривую, определяющую меридиан соответствующей поверхности вращения, можно задать её полярным уравнением

$$r(q_1) = \frac{p}{1 - e\cos q_1},$$

и, следовательно, для функций $\rho(q_1)$ и $\zeta(q_1)$, определяющих меридиан заданной поверхности вращения, мы будем иметь следующие выражения

$$\rho(q_1)=r(q_1)\sin q_1=\frac{p\sin q_1}{1-e\cos q_1},\quad \zeta(q_1)=r(q_1)\cos q_1=\frac{p\cos q_1}{1-e\cos q_1}.$$

Тогда коэффициенты Ламе h_1, h_2 и главные кривизны k_1, k_2 поверхности, вычисляемые по формулам (10), (11) будут равны

$$h_1=\frac{p}{1-e\cos q_1}\sqrt{1+e^2-2e\cos q_1},\quad h_2=\frac{p\sin q_1}{1-e\cos q_1},$$

$$k_1=-\frac{(1-e\cos q_1)^3}{p\left(1+e^2-2e\cos q_1\right)^{\frac{3}{2}}},\quad k_2=-\frac{1-e\cos q_1}{p\sqrt{1+e^2-2e\cos q_1}}.$$

Линейное дифференциальное уравнение второго порядка (17) запишется следующим образом

$$\frac{d^2V}{dq_1^2}+\frac{2e-\left(1+e^2\right)\cos q_1}{\left(1+e^2-2e\cos q_1\right)\sin q_1}\frac{dV}{dq_1}-\frac{n^2e^2\sin^2 q_1}{\left(1+e^2-2e\cos q_1\right)^2}V=0. \qquad (18)$$

В дифференциальном уравнении (18) сделаем замену независимой переменной по формуле $\cos q_1=x$. Тогда уравнение (18) примет вид уравнения с рациональными коэффициентами

$$\frac{d^2V}{dx^2}+\frac{2e}{\left(2ex-e^2-1\right)}\frac{dV}{dx}-\frac{n^2e^2}{\left(2ex-e^2-1\right)^2}V=0. \qquad (19)$$

Для того, чтобы привести дифференциальное уравнение (19) к более простому виду, сделаем замену

$$y=V\sqrt{2ex-e^2-1}.$$

Тогда линейное дифференциальное уравнение второго порядка перепишется следующим образом:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{\left(1-n^2\right)e^2}{\left(2ex-e^2-1\right)^2}y.$$

Общее решение данного уравнения может быть представлено в виде:

$$y=C_1\left(2ex-e^2-1\right)^{\frac{1+n}{2}}+C_2\left(2ex-e^2-1\right)^{\frac{1-n}{2}},$$

где C_1 и C_2 – произвольные постоянные. Для исходного линейного дифференциального уравнения (18) общее решение записывается следующим образом:

$$V=K_1\left(1+e^2-2e\cos q_1\right)^{\frac{n}{2}}+K_2\left(1+e^2-2e\cos q_1\right)^{-\frac{n}{2}},$$

где K_1 и K_2 – произвольные постоянные интегрирования. Таким образом, нами установлено, что при любых значениях параметров n, p и e линейное дифференциальное уравнение второго порядка (18) интегрируется в явном виде. Следовательно, задача о качении шара по поверхности такой, что центр шара движется по заданной невырожденной поверхности вращения второго порядка, может быть проинтегрирована в квадратурах.

4. Качение шара по тору

Пусть абсолютно шероховатая поверхность, по которой катится шар, такова, что геометрическое место центров шара представляет собой тор. Уравнение тора запишем в виде (8):

$$\mathbf{r}=\left(\left(a+b\cos q_1\right)\cos q_2,\ \left(a+b\cos q_1\right)\sin q_2,\ b\sin q_1\right).$$

В рассматриваемом случае

$$\rho(q_1)=a+b\cos q_1,\quad \zeta(q_1)=b\sin q_1.$$

Здесь a и b – параметры, имеющие размерность длины. Тогда коэффициенты Ламе h_1 и h_2, вычисляемые по формулам (10), имеют вид:

$$h_1 = b, \quad h_2 = a + b\cos q_1,$$

а главные кривизны k_1 и k_2 тора, вычисляемые по формулам (11), равны

$$k_1 = \frac{1}{b}, \quad k_2 = \frac{\cos q_1}{a + b\cos q_1}.$$

Линейное дифференциальное уравнение второго порядка (17) в рассматриваемом случае принимает вид:

$$\frac{d^2V}{dq_1^2} + \frac{b\sin q_1}{a + b\cos q_1}\frac{dV}{dq_1} + \frac{n^2 a}{a + b\cos q_1}V = 0. \tag{20}$$

В уравнении (20) сделаем замену независимой переменной по формуле:

$$x = \frac{1 + \cos q_1}{2},$$

тогда данное уравнение примет вид

$$\frac{d^2V}{dx^2} + \frac{2ax - a + b}{2x(x-1)(2bx - b + a)}\frac{dV}{dx} - \frac{n^2 a}{x(x-1)(2bx - b + a)}V = 0. \tag{21}$$

Вводя обозначение $a = b(1 - 2x_0)$, перепишем линейное дифференциальное уравнение (21) следующим образом:

$$\frac{d^2V}{dx^2} + \left(\frac{1}{2x} + \frac{1}{2(x-1)} - \frac{1}{x - x_0}\right)\frac{dV}{dx} + \frac{(2x_0 - 1)n^2}{2x(x-1)(x - x_0)}V = 0. \tag{22}$$

Уравнение (22) представляет собой линейное дифференциальное уравнение второго порядка, известное как уравнение Хейна (или Гойна, см. [4]). Общее решение линейного дифференциального уравнения (22) может быть записано в виде:

$$V = C_1 H_G\left(x_0,\ n^2\left(\frac{1}{2} - x_0\right);\ -1,\ 0,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2};\ x\right) + C_2\sqrt{x}\,H_G\left(x_0,\ \left(\frac{1}{2} - x_0\right)(n^2 - 1);\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ \frac{3}{2},\ \frac{1}{2};\ x\right).$$

Таким образом, рассматриваемая задача о движении шара по поверхности вращения такой, что геометрическое место центров шара представляет собой тор, интегрируется в функциях Хейна.

Литература

1. Кулешов А.С. Соломина Д.В. Применение алгоритма Ковачича для исследования задачи о качении тяжелого однородного шара по поверхности вращения // Проблемы информатики. 2021. № 1. С. 15 – 24.
2. Routh E.J. The Advanced Part of a Treatise on the Dynamics of a System of Rigid Bodies: Being Part II of a Treatise on the Whole Subject. Cambridge: Cambridge University Press, 2013.
3. Noether F. Ueber Rollende Bewegung einer Kugel auf Rotationsflachen. Leipzig: Teubner, 1909.
4. Ronveaux A. Heun’s Differential Equations. Oxford: Oxford University Press. 1995.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ НЕЙРОСЕТЕВОЙ АППРОКСИМАЦИИ В ЗАДАЧАХ ГЛОБАЛЬНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ[1*]

И.Г. Лебедев, Д.В. Надумин, С.Н. Карпенко

Нижегородский государственный университет им Н.И. Лобачевского

Аннотация: В работе рассмотрена задача поиска глобального минимума многоэкстремальной функции. Представлены результаты работы комбинированного алгоритма глобального поиска, в котором для ускорения процесса поиска применялась аппроксимация целевой функции с помощью нейросети. Использование аппроксимации функции позволяет уменьшить количество вычислений ее значений при решении задачи оптимизации. Эксперименты, демонстрирующие эффективность предложенного подхода, проведены на серии тестовых задач глобальной оптимизации. Использование комбинированного алгоритма позволило, более чем на 30%, сократить число вычислений целевой функции.

Ключевые слова: методы оптимизации, глобальная оптимизация, нейронные сети, машинное обучение.

1. Постановка задачи глобальной оптимизации

Задача многомерной многоэкстремальной оптимизации может быть определена [14, 16] как поиск наименьшего значения действительной функции $\varphi(y)$

$$\varphi(y^*) = \min\{\varphi(y): y \in D\}, \quad (1)$$

$$D = \{y \in R^N: a_i \le y_i \le b_i, 1 \le i \le N\}, \quad (2)$$

где a, $b \in R^N$ – заданные векторы.

Приближённое решение задачи (1) можно свести к построению оценки $y_k^* \in D$, отвечающей некоторому понятию близости к точке глобального минимума y^* (например, $\|y^* - y_k^*\| \le \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ – заданная точность) на основе конечного числа k вычислений значений искомой функции. Предполагается, что в отношении этой задачи выполняются два важных условия.

Во-первых, задача $\varphi(y)$ может быть задана не аналитически, а программно, в виде некоторой библиотеки, реализующей алгоритм вычисления ее значений.

Во-вторых, оптимизируемая функция $\varphi(y)$ удовлетворяет условию Липшица

$$|\varphi(y_1) - \varphi(y_2)| \le L\|y_1 - y_2\|, y_1, y_2 \in D, 0 < L < \infty, \quad (3)$$

что соответствует ограниченности изменения значения функции при ограниченном изменении аргумента.

2. Методы глобальной оптимизации

2.1. Алгоритм имитации отжига

Алгоритм имитации отжига является общим методом решения задач глобальной оптимизации, в том числе – задач дискретной и комбинаторной оптимизации.

Алгоритм основывается на имитации физического процесса, который происходит при кристаллизации вещества, в том числе при отжиге металлов. При помощи моделирования такого процесса ищется точка (или множество точек), на которой достигается минимум целевой функ-

[1*] Работа выполнена при поддержке Минобрнауки РФ (проект № FSWR-2023-0034) и НОМЦ «Математика технологий будущего» (проект № 075-02-2022-883).

ции $f(y)$. В процессе решения последовательно вычисляются ее значения $f(y^i)$ в некоторых точка $y^i = (y_1, \dots, y_n)$ пространства Y [3].

Введём следующие обозначения: Y– множество всех состояний системы, y_i – состояние системы на i-ом шаге алгоритма; t_i – температура на i-ом шаге.

Определим три функции:

1. Функция энергии (то, что оптимизируем): $E: Y \to R$.
2. Функция изменения температуры с течение времени: $T: N \to R$.
3. Функция, порождающая новое состояние: $F: Y \to X$.

На входе минимальная t_{min} и начальная t_{max} температуры. Задаём произвольное первое состояние y_1 и $t_{min} = t_{max}$.

Пока $t_i > t_{min}$:

1. $y_c = F(y_{i-1})$,
2. $\Delta E = E(y_c) - E(y_{i-1})$,
3. если $\Delta E \le 0$, то $y_i = y_c$. Если $\Delta E > 0$, то переход осуществляется с вероятностью $P(\Delta E) = e^{-\Delta E/t_i}$,
4. понижаем температуру $t_{i+1} = T(i)$.

Возвращаем последнее состояние y.

2.2. Алгоритм глобальной оптимизации

Алгоритм глобального поиска предназначен для решения задач условной оптимизации тех функций, которые удовлетворяют условию Липшица[12, 14, 15]. Алгоритм глобального поиска позволяет находить глобально-оптимальное решение в задачах с ограничениями-неравенствами при условии, что искомая функция и левые части неравенств удовлетворяют условию Липшица в области поиска.

Для многомерных задач используется редукция размерности, например, заполнение гиперкуба кривой Пеано $y(x)$, которая непрерывно и однозначно отображает отрезок вещественной оси [0,1] на N-мерный куб

$$\{y \in R^N: -2^{-1} \le y_i \le 2^{-1}, 1 \le i \le N\} = \{y = y(x): 0 \le x \le 1\}. \quad (4)$$

Использование подобного рода отображений позволяет свести многомерную задачу (1) к одномерной задаче

$$\varphi(y^*) = \varphi\big(y(x^*)\big) = \min\{\varphi\big(y(x)\big): x \in [0,1]\} \quad (5)$$

При этом условие Липшица переходит в равномерное условие Гельдера

$$|\varphi(y_1) - \varphi(y_2)| \le H|y_1 - y_2|^{\frac{1}{N}}, y_1, y_2 \in [0,1] \quad (6)$$

Исходя из вышеизложенного, не ограничивая общности, можно рассматривать оптимизацию одномерной функции $f(x) = \varphi(y(x)), x \epsilon [0,1]$, удовлетворяющей условию Гельдера.

3. Комбинированный алгоритм глобального поиска

Нами разработан комбинированный алгоритм глобальной оптимизации, использующий нейронную сеть для аппроксимации функций и алгоритм глобального поиска для отыскания глобального оптимума [9, 10, 11].

В данной работе была выбрана нейронная сеть прямого распространения (feedforward neural network) [1–8] из библиотеки Keras [13].

В ходе исследования параметры нейронной сети были подобраны следующим образом: 5 слоёв по 32 нейрона в каждом слое. В качестве активационной функции выбрана сигмоида. Весовые коэффициенты имеют нормальное распределение со средним равным 0 и стандартным отклонением равным 0.2, что позволяет задавать их значения от −1 до 1. Смещение нейрона (bias) инициализировалось 0. В выходном слое только один нейрон.

Сам комбинированный алгоритм можно разбить на 2 этапа:

1. Запуск алгоритма оптимизации с ограниченным количеством итераций на целевой функции.
2. Пока не выполнен критерий остановки, либо пока не выполнено ограничение на количество вычислений функции, делаем следующее:
   (a) Обучаем нейросеть на точках, найденных на предыдущем шаге.
   (b) Запускаем алгоритм оптимизации на аппроксимации целевой функции нейросетью.
   (c) Добавляем найденную точку к основной выборке.
   (d) Выполняем очередную итерацию алгоритма оптимизации на целевой функции.

4. Эксперименты

Эксперименты проводились на суперкомпьютере Лобачевского. Каждый узел, на котором они проходили, содержит процессор Intel Sandy Bridge E5-2660 2,2 ГГц и 64 Гб оперативной памяти. В качестве тестовых задач были взяты 10 двумерных и 10 трёхмерных функций из генератора GKLS [2].

В таблице 1 приведено сравнение результатов работы алгоритма имитации отжига, алгоритма глобального поиска, комбинированного алгоритма с имитацией отжига и комбинированного алгоритма с АГП, на 10-ти двумерных задачах.

Таблица 1. Сравнение результатов работы на двухмерных задачах.

Название алгоритма	**Среднее количество вычислений целевой функции**
Имитация отжига	4225.9
Алгоритм глобального поиска	393.5
Комбинированный алгоритм с имитацией отжига	293.4
Комбинированный алгоритм с АГП	251.9

В таблице 2 приведено сравнение результатов работы, алгоритма глобального поиска и комбинированного алгоритма с АГП, на 10-ти трёхмерных задачах.

Таблица 2. Сравнение результатов работы на трехмерных задачах.

Название алгоритма	**Среднее количество вычислений целевой функции**
Алгоритм глобального поиска	5445.1
Комбинированный алгоритм с АГП	1694.0

Результаты эксперимента показывают значительное уменьшение количества испытаний, требуемых для нахождения глобального минимума. При этом сохраняется высокая точность нахождения минимума.

Работа выполнялась на языке программирования Python с использованием библиотек Numpy, Scipy, Keras. Время оптимизации алгоритмом глобального поиска 10-ти трёхмерных функций составило 1260 секунд (≈21 минута). Время оптимизации комбинированным алгоритмом с АГП 10-ти трёхмерных задач составило 296920 секунд (≈ 82 часа). Наибольшие временные потери при работе комбинированного алгоритма пришлись на обучение нейросети и аппроксимацию нейросетью. Направлением дальнейших исследований будет проработка подходов к снижению накладных расходов на обучение нейросети.

Литература

1. Cybenko, G.V. Approximation by Superpositions of a Sigmoidal function. // Mathematics of Control Signals and Systems. 1989. Vol. 2, № 4. P. 303–314.

2. Gaviano M., Lera D., Kvasov D.E., Sergeyev Y.D. Software for generation of classes of test functions with known local and global minima for global optimization // ACM Transactions on Mathematical Software. 2003. Vol. 29. P. 469–480.
3. Kirkpatrick, S.; Gelatt Jr,C.D.;Vecchi, M. P. Optimization by Simulated Annealing // Science. Vol. 220 No. 4598. 1983. P. 671–680.
4. LeCun Y., Boser B. AT&T Bell Laboratories. URL: http://yann.lecun.com/exdb/publis/pdf/lecun-89e.pdf.
5. Paul Werbos. National Science Foundation. URL: https://www.researchgate.net/publication/35657389_Beyond_regression_new_tools_for_prediction_and_analysis_in_the_behavioral_sciences.
6. Rosenblatt F. Cornell Aeronautical Laboratory. URL: https://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.335.3398&rep=rep1&type=pdf.
7. Warren S. McCulloch, Walter Pitts. California State University. URL: https://home.csulb.edu/~cwallis/382/readings/482/mccolloch.logical.calculus.ideas.1943.pdf.
8. Гермейер Ю.Б. Введение в теорию исследования операций. М.: Наука, 1971. 384 с.
9. Карпенко С.Н., Лебедев И.Г., Надумин Д.В. Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ [Электронный ресурс]: Сборник материалов X Международной научной молодежной школы-семинар имени Е.В. Воскресенского (Саранск, 14-18 июля 2022 г.).
10. Лоран П.Ж. Аппроксимация и оптимизация Издательство: Мир, 1975. 496 с.
11. Мордухович Б.Ш. Методы аппроксимаций в задачах оптимизации и управления М.: Наука, 1988. – 360 с.
12. Неймарк Ю.И., Стронгин Р.Г. Информационный подход к задаче поиска экстремума функций // Изв. АН СССР, Техническая кибернетка, Т. 1, 1996, С. 17-26.
13. Официальный сайт библиотеки Keras. – URL: https://keras.io/.
14. Стронгин Р.Г. Численные методы в многоэкстремальных задачах М.: Наука,1978. 240 с.
15. Стронгин Р.Г., Гергель В.П., Гришагин В.А., Баркалов К.А. Параллельные вычисления в задачах глобальной оптимизации. М.: Изд-во Московского университета, 2013. 280 с.
16. Сухарев А.Г. Оптимальный поиск экстремума. М.: Изд. МГУ, 1975.

ФАКТОР-КОЛЬЦА И ПОДПРЯМАЯ НЕРАЗЛОЖИМОСТЬ ЦЕНТРАЛЬНО СУЩЕСТВЕННЫХ КОЛЕЦ[1*]

О.В. Любимцев[1], А.А. Туганбаев[2]

[1]Нижегородский госуниверситет им. Н.И. Лобачевского,
[2]Национальный исследовательский университет «МЭИ»

Пусть R – кольцо и J(R), C(R) – его радикал Джекобсона и центр, соответственно. Доказано, что если R – центрально существенное кольцо и факторкольцо R/J(R) коммутативно, то любой минимальный односторонний идеал лежит в центре C(R). В центрально существенном кольце каждый минимальный односторонний идеал является двусторонним. Артиново справа (или нетерово справа подпрямо неразложимое) центрально существенное кольцо является артиновым справа и слева кольцом. Описаны центрально существенные нетеровы подпрямо неразложимые кольца и центрально существенные кольца с подпрямо неразложимым центром. Приведены примеры некоммутативных подпрямо неразложимых центрально существенных колец.

Ключевые слова: центрально существенное кольцо, подпрямо неразложимое кольцо, инвариантное кольцо.

1. Введение

Мы рассматриваем только ассоциативные унитальные ненулевые кольца. Радикал Джекобсона кольца R обозначается через J(R). Кольцо R называется центрально существенным, если либо R коммутативно, либо для каждого его нецентрального элемента a существуют такие ненулевые центральные элементы x, y, что ax = y. Ясно, что кольцо R с центром C(R) центрально существенно в точности тогда, когда модуль RC(R) является существенным расширением модуля C(R)C(R). Центрально существенные кольца обладают многими свойствами коммутативных колец. Например,

- все идемпотенты кольца A центральны;
- если кольцо R полупервично, то кольцо R коммутативно;
- если R – центрально существенное локальное кольцо, то кольцо R/J(R) – поле и поэтому коммутативно.

С другой стороны, центрально существенное кольцо R может быть весьма далеким от коммутативного кольца. Например,

- факторкольцо R/J(R) кольца R по первичному радикалу может не быть центрально существенным и, в частности, полупервичное кольцо R/J(R) может не быть коммутативным;
- существуют конечные некоммутативные центрально существенные групповые алгебры;
- существуют конечные некоммутативные центрально существенные внешние алгебры.

Подробнее см., монографию [1].

2. Идеалы центрально существенных колец

Кольцо называется *инвариантным справа (слева),* если каждый правый (левый) идеал является двусторонним идеалом. Кольцо называется *инвариантным*, если оно инвариантно справа и слева. В работе [2] построено центрально существенное кольцо, которое не является инвариантным ни справа, ни слева. Для модуля M *цоколем Soc (M*) называется сумма всех простых подмодулей в M; если M не содержит простых подмодулей, то Soc (M) = 0 по определению.

[1*] Работа О.В. Любимцева поддержана Минобрнауки РФ, проект FSWR-2023-0034.
Исследование А.А.Туганбаева выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-11-00052, https://rscf.ru/project/22-11-00052.

Теорема 1.

1) В центрально существенном кольце всякий минимальный односторонний идеал является двусторонним идеалом.

2) Если R – центрально существенное кольцо и факторкольцо R/J(R) коммутативно, то любой минимальный правый идеал кольца R лежит в центре C(R) кольца R. В частности, все минимальные односторонние идеалы кольца R являются идеалами и Soc (RR) лежит в центре кольца R.

3) Существуют центрально существенные кольца, в которых не все максимальные правые идеалы являются идеалами.

В связи с теоремой 1 мы сформулируем открытый вопрос.

Открытый вопрос. Верно ли, что в центрально существенном кольце каждый минимальный идеал лежит в центре кольца?

Теорема 2. Если R – артиново справа центрально существенное кольцо, то R – артиново справа и слева кольцо.

Теорема 3. Пусть R – кольцо, у которого все факторкольца центрально существенны.

1) Если R – нетерово справа кольцо, то R – подпрямое произведение локальных артиновых справа и слева колец.

2) R – инвариантное кольцо.

3. Подпрямо неразложимые центрально существенные кольца

Кольцо R называется *подпрямо неразложимым справа*, если пересечение H_r *(правая сердцевина*) всех его ненулевых правых идеалов не равно нулю. Аналогично определяются *подпрямо неразложимые* слева кольца с *левой сердцевиной* H_l. Кольцо R называется *подпрямо неразложимым* с *сердцевиной H*, если пересечение H всех его ненулевых идеалов не равно нулю. Если S и T – подмножества в кольце R, то $\mathrm{Ann}_S T = \{s \in S: sT = 0\}$.

Предложение 4. Для центрально существенного кольца R следующие условия эквивалентны:

1) кольцо R подпрямо неразложимо справа;

2) кольцо R подпрямо неразложимо слева;

3) кольцо R подпрямо неразложимо.

Предложение 5. Если центр центрально существенного кольца R подпрямо неразложим, то кольцо R подпрямо неразложимо справа и слева.

Теорема 6. Пусть R – нетерово справа кольцо с центром C(R) = C. Обозначим C* = J(R)\J(C).

1) R – артиново справа локальное кольцо.

2) Если кольцо R – подпрямо неразложимо, то кольцо R является центрально существенным в точности тогда, когда $\mathrm{Ann}_{C^*} J(C) = \mathrm{Ann}_{C^*} J(R) = 0$.

3) Если центр C кольца R подпрямо неразложим с сердцевиной H, то кольцо R является центрально существенным в точности тогда, когда $rC \cap H \neq 0$ для любого ненулевого $r \in R$.

Пример 7. Приведем пример артинова центрально существенного подпрямо неразложимого справа и слева инвариантного кольца R, не являющегося центрально подпрямо неразложимым, у которого все собственные центрально существенные факторкольца коммутативны. Однако, существует собственное факторкольцо кольца R, которое не будет подпрямо неразложимым и не является центрально существенным кольцом. Кольцо R является некоммутативной 8-мерной алгеброй над произвольным полем F характеристики 0 или $p \neq 2$. Если мы возьмем $F = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ при простом числе $p > 2$, то кольцо R будет конечным.

Пусть $R = \Lambda(V)$ – внешняя алгебра с порождающими элементами e_1, e_2, e_3. Тогда R – F-алгебра размерности 8 с базисом

$$\{1, e_1, e_2, e_3, e_1 \wedge e_2, e_2 \wedge e_3, e_1 \wedge e_3, e_1 \wedge e_2 \wedge e_3\},$$

причем R – некоммутативное центрально существенное кольцо (подробнее см. [1, Пример 2]) с центром

$$C(R) = \{q \cdot 1 + q_1 \cdot e_1 \wedge e_2 + q_2 \cdot e_2 \wedge e_3 + q_3 e_1 \wedge e_3 + q_4 \cdot e_1 \wedge e_2 \wedge e_3,\ q \in F\}.$$

Однако $I_1 \cap I_2 = \{0\}$ для центральных идеалов $I_1 = \langle e_1 \wedge e_2 \rangle_F$ и $I_2 = \langle e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \rangle_F$, т.е. центр кольца R – не подпрямо неразложимое кольцо. Заметим, что R является инвариантным коль-

цом, а идеал $H = I_2$ лежит в пересечении любых идеалов из R. Следовательно, R является артиновым центрально существенным подпрямо неразложимым справа и слева кольцом, центр которого не является подпрямо неразложимым.

Пример 8. Пусть Q_8 – группа кватернионов, т.е. группа с двумя образующими a, b и определяющими соотношениями $a^4 = 1$, $a^2 = b^2$ и $aba^{-1} = b^{-1}$. Имеем:

$$Q_8 = \{e, a, a^2, b, ab, a^3, a^2b, a^3b\},$$

с центром $C(Q_8) = \{e, a^2\}$. Рассмотрим групповую алгебру $R = \mathbb{Z}_2 Q_8$ с центром

$$C(R) = a_0 + a_1a^2 + a_2 (a + a^3) + a_3 (b + a^3b) + a_4(ab + a^3b),\ a_i \in \mathbb{Z}_2\};$$

см., например, [3]. Тогда R – кольцо с подпрямо неразложимым центром и сердцевиной $H = \{0, \bar{Q}_8\}$, где $\bar{Q}_8 = \sum_{g\in Q8} g$. Кроме того, R – центрально существенное кольцо; см., [1, Пример 1]. Из теоремы 6(3) следует, что для всякого $0 \neq x \in R$ существует такой $c \in C(R)$, что $xc = \bar{Q}_8$. Тогда фактор-кольцо $R^* = R/H$ с базисом $\{e^*, a^*, a^{*2}, a^{*3}, b^*, (ab)^*, (a^2b)^*\}$ и центром

$$C(R^*) = \{a_0e^* + a_1a^{*2} + a_2 (a^* + a^{*3}) + a_3(b^* + (a^2b)^*) + a_4(e^* + a^* + a^{*2} + a^{*3} + b^* + (a^2b)^*)\}$$

не является центрально существенным кольцом. Непосредственно проверяется, что все собственные центрально существенные факторкольца кольца R коммутативны.

Пример 9. Приведем пример некоммутативного кольца с подпрямо неразложимым центром, у которого все факторкольца центрально существенны. Пусть $F = \mathbb{Q}(x, y)$ – поле рациональных функций. Рассмотрим две частные производные $d_1 = \partial/\partial x$ и $d_2 = \partial/\partial y$. Тогда кольцо $R = T(F, F)$ матриц

$$\left\{\begin{pmatrix} f & d_1(f) & g \\ 0 & f & d_2(f) \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} : f, g \in F\right\}.$$

является центрально существенным кольцом; см., [1, Пример 3}. Кроме того, R – кольцо с подпрямо неразложимым центром и сердцевиной

$$H = \left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 & g \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} : g \in F\right\}.$$

Так как $R/H \cong \mathbb{Q}(x,y)$ и H – наименьший идеал в R, то в R нет ненулевых собственных идеалов, отличных от H.

Замечание 10. В [4, Proposition 3.3] доказано, что если R – локальное центрально существенное кольцо, то кольцо R/J(R) коммутативно (в частности, центрально существенно). В общем случае это неверно; см. [5, Theorem 1.5].

Замечание 11. Без предположения центральной существенности утверждение теоремы 6(1) неверно: существуют нетеровы справа, подпрямо неразложимые справа кольца, которые не являются артиновыми справа; см. [6, Example 2.2].

Замечание 12. Если R – центрально существенное подпрямо неразложимое справа и слева кольцо с сердцевиной H, то либо $H^2 = 0$, либо R – поле. Действительно, если $H^2 = H$, то R – тело; см. [6, Proposition 1.3]. Так как R – центрально существенное кольцо, то из [1, Теорема 1.2.2] следует, что R – поле.

Литература

1. Туганбаев А.А. Центрально существенные кольца. Москва: Флинта, 2022, 160 с. ISBN 978-5-9765-5093-3.
2. Lyubimtsev O.V., Tuganbaev A.A. Centrally Essential Torsion-Free Rings of Finite Rank // Beitrage zur Algebra und Geometrie Contributions to Algebra and Geometry. – 2021. – Vol. 62, no. 3. – P. 615–622.
3. Passman D.S. The Algebraic Structure of Group Rings // John Wiley and Sons, New York, 1977.
4. Markov V.T., Tuganbaev A.A. Centrally essential rings // Discrete Math. Appl. – 2019. – Vol. 29, no. 3. – P. 189–194.

5. Markov, V.T., Tuganbaev, A.A. Constructions of Centrally Essential Rings // Communications in Algebra. – 2020. – Vol. 48. – № 1. – P. 198–203.
6. Deshpande M.G. Structure of right subdirectly irreducible ring I // J. Algebra. – 1971. – Vol. 17. – P.317–325.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МАШИННОГО ОБУЧЕНИЯ ДЛЯ СЕГМЕНТАЦИИ УЗИ ИЗОБРАЖЕНИЙ СКЕЛЕТНОЙ МЫШЦЫ[1*]

Е.А. Мищенко, И.Ю. Демин

Нижегородский госуниверситет им. Н.И. Лобачевского

Сегментация структур мышечной ткани на УЗИ-изображениях имеет ключевое значение для определения состояния мышц, планирования реабилитационных программ и мониторинга прогресса лечения. Для сегментации скелетных мышц использовались архитектура U-net с различным количеством сверточных слоев, а также сеть U-net++, которая представляет собой модификацию классической U-net. Для обучения нейронной сети был использован набор данных ультразвуковых снимков скелетных мышц. В качестве оптимизатора использовался алгоритм Adam, а в качестве функции потерь - бинарная кросс энтропия. В результате обучения была получена модель с точностью 0,95 определения границ мышечной ткани на УЗИ изображениях.

Ключевые слова: УЗИ изображение, машинное обучение, сегментация

1. Введение

Ультразвуковое исследование (УЗИ) - мощный инструмент для визуализации внутренних структур органов и тканей в медицинской диагностике. Однако, УЗИ изображения обладают определенными особенностями, которые необходимо учитывать при разработке методов сегментации с использованием машинного обучения [1]. Целью данной работы было получение модели машинного обучения, способную сегментировать УЗИ изображения, а именно выделять границы мышечного слоя.

2. Использование МО для сегментации УЗИ изображений

Машинное обучение (МО) может быть использовано для поддержки при расшифровке УЗИ изображений оператором. Для этого необходима модель, которая обучена качественно сегментировать изображения. На вход такой модели подается УЗИ изображение, модель преобразовывает его, анализирует и подает на выход готовое сегментированное изображение.

Выбор подходящего набора данных для обучения и тестирования модели является важным этапом в исследовании сегментации УЗИ изображений. Процесс выбора датасета требует тщательного анализа и соответствия задаче сегментации на УЗИ.

Для обучения был использован набор данных N. J. Cronin`a [2], состоящий из большого количества одиночных изображений скелетных мышц (медиальной и латеральной икроножных, латеральной широкой и передней большеберцовой). Полученный набор данных (более 500 изображений) был использован для обучения модели обнаружения границ мышечного слоя. Пример изображения из датасета приведен на рис. 1.

[1*] Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (государственное задание № FSWR-2023-0031).

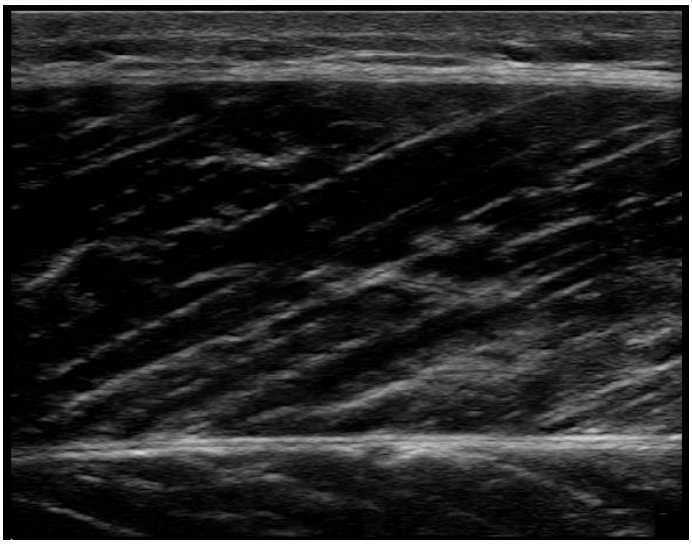


Рис. 1. Пример тренировочного изображения

Все изображения были аннотированы с помощью бинарных масок, отображающих границы мышечной ткани. Для каждого изображения создавалась бинарная маска, в которой нужные структуры заменялись белыми пикселями, а остальные – черными. Маски не могут пересекаться. Это означает, что ни один пиксель не принадлежит одновременно двум классам. Маски используются в качестве меток точности при обучении нейронных сетей. Пример изображения и его маски из датасета приведен на рис. 2.

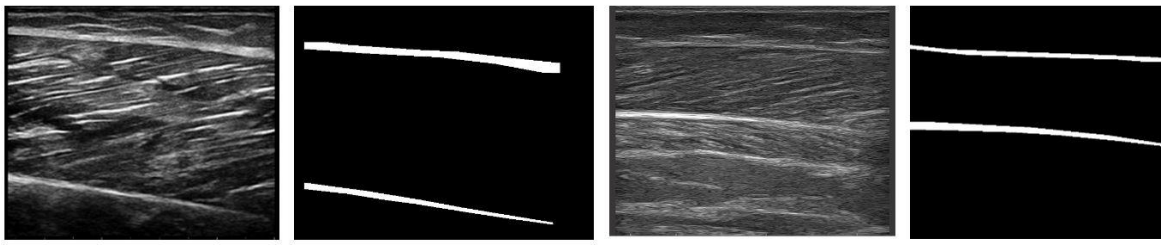


Рис. 2. Изображения и их маски

В машинном обучении точность модели в значительной степени зависит от качества и количества данных, используемых для обучения. Одним из способов повышения качества обучения является увеличение размера датасета. Существуют различные методы искусственного увеличения размера набора данных, такие как применение шума или сдвиг сканов по пикселям. Такие методы особенно актуальны в медицинской сфере, где получение разнообразного датасета, состоящего из большого количества оригинальных изображений, является этической проблемой. Применяя различные преобразования, становится возможным генерировать новые выборки данных, похожие на исходные. Одним из самых простых и эффективных методов является зеркальное отражение изображений. Этот метод позволил расширить набор данных в 2 раза по сравнению с первоначальным размером, предоставляя больше данных для обучения и оценки модели [3]. Увеличение набора данных производилось после разделения датасета на обучающую и валидационную выборки, чтобы избежать утечки данных, которая может существенно исказить результаты обучения.

Однако, увеличение размера набора данных означает и увеличение объема обрабатываемых данных. Это может представлять собой вычислительную проблему, поэтому перед дальнейшим расширением датасета данных важно учитывать вычислительную мощность или использовать распределенные вычисления для эффективной обработки данных. Для достижения оптимальных результатов крайне важно найти баланс между размером набора данных и вычислительной мощностью, поэтому дальнейшее расширение датасета в наших условиях было сочтено нецелесообразным.

В качестве изображений для финальной проверки были использованы УЗИ изображения, полученные ультразвуковые изображения скелетных мышц добровольцев, полученные с помощью акустической системы Verasonics, расположенной в лаборатории MedLab Нижегородского университета [4]. Данные изображения использовались для оценки окончательной производительности модели. Сканы представляют собой УЗИ изображения здоровых мышц аналогичные тем, что использовались для обучения модели. Способность корректно расшифровать новые изображения являются признаком хорошей обучаемости модели.

3. Применение нейронных сетей для сегментации УЗИ изображений скелетной мышцы

3.1. Построение U-Net

Для решения нашей задачи использовался метод обучения с учителем, который включал в себя обучение модели на размеченном наборе данных, где каждое изображение связано с соответствующей маской сегментации [4]. Модель учится сопоставлять входное изображение с выходной маской сегментации, минимизируя функцию потерь, которая измеряет разницу между предсказанной и истинной маской. Метод контролируемого обучения был применен для сегментации ультразвуковых изображений с использованием сверточных нейронных сетей (CNN). Популярной для сегментации ультразвуковых изображений является U-Net, впервые представленная в 2015 году Ronneberger et al [5].

Архитектура U-Net представляет собой сверточную нейронную сеть, которая была специально разработана для задачи сегментации изображений. Сеть U-Net имеет U-образную архитектуру, что означает, что она состоит из двух частей: сверточной части и деконволюционной части. Сверточная часть сети отвечает за извлечение признаков из изображения, а деконволюционная часть сети отвечает за восстановление сегментированного изображения. (рис. 3.). Ввиду того, что U-Net имеет относительно небольшое количество параметров, он может быть успешно обучен на небольших датасетах, и аугментация данных может улучшить обобщающую способность модели. U-Net хорошо подходит для медицинской сегментации, где точность и интерпретируемость результатов имеют особое значение.

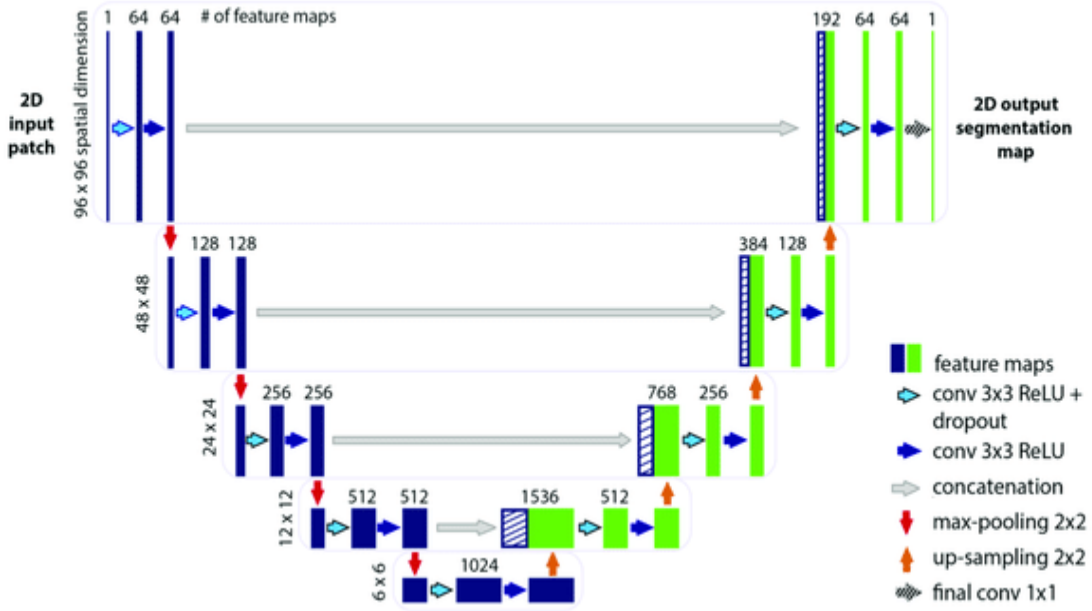


Рис. 3. Иллюстрация U-Net архитектуры [5]

Эти особенности позволяют U-Net успешно справляться с задачами сегментации, особенно в медицинской области, где требуется высокая точность и интерпретируемость результатов.

3.2. U-Net++ как улучшение классической U-Net

Сеть U-Net++ была предложена как модификация архитектуры сети U-Net, которая была разработана для улучшения производительности сети на задачах сегментации медицинских изображений [6]. Детальная иллюстрация U-Net++ архитектуры приведена на рис.4.

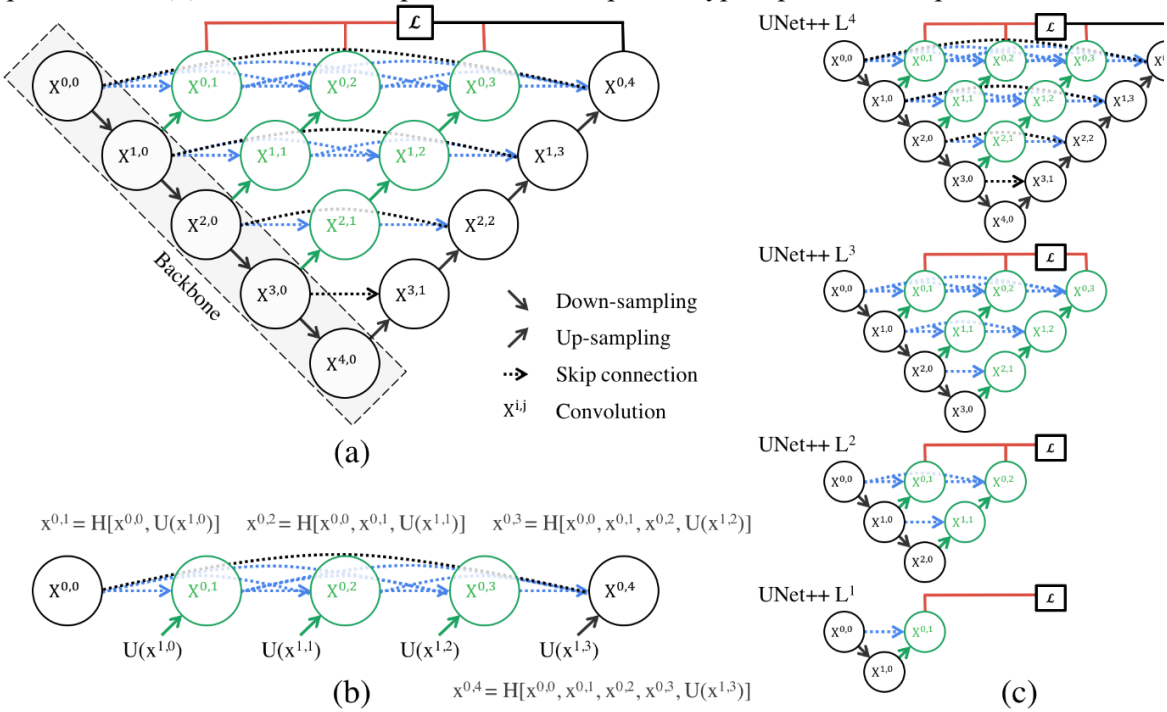


Рис. 4. Архитектура UNet++: (a) UNet++ состоит из кодера и декодера, которые соединены через ряд вложенных плотных сверточных блоков. В графической аннотации черным цветом обозначена исходная U-сеть, зеленым и синим показаны плотные блоки свертки на путях пропуска, а красным обозначен глубокий контроль. Красный, зеленый и синий компоненты отличают UNet++ от U-Net.
(b) Подробный анализ первого пути пропуска UNet++.
(c) UNet++ может быть обрезан во время вывода, если его обучать под тщательным наблюдением [6]

Сеть U-Net++ отличается от сети U-Net тем, что она имеет дополнительные сверточные уровни в сверточной части сети и дополнительные деконволюционные уровни в деконволюционной части сети. Эти дополнительные уровни позволяют сети U-Net++ извлечь больше признаков из изображения и восстановить более точное сегментированное изображение.

3.3. Сравнение сегментации с помощью сети U-Net и сети U-Net++

В этом разделе проведено сравнение результатов сегментации с помощью сети U-Net, сети U-Net++, а также их варианты с увеличенным количеством сверточных слоев. Во всех процессах обучения использовался набор данных из 1200 изображений УЗИ скелетных мышц, который был разделен на обучающий и валидационный в соотношении 8/2.

Точность сетей оценивалась метриками accuracy и IoU. Точность – это метрика, которая используется для оценки производительности модели машинного обучения. Она определяется как отношение количества правильных прогнозов к общему количеству прогнозов. Индекс перекрытия (IoU) – это метрика, которая используется для оценки точности сегментации изображений. IoU определяется как отношение площади пересечения двух областей к сумме площадей двух областей. Оба показателя рассчитывались для каждой эпохи, результаты обучения сетей представлены в таблице 1.

Таблица 1. Точность сегментации сетей U-Net, U-Net++ с разным количеством слоев.

Сеть	Точность (accuracy)	IoU (IoU curve)	Время обучения
U-Net 2 слоя	0.9593	0.9891	43 минуты
U-Net 3 слоя	0.9562	0.9879	56 минут
U-Net++ 2 слоя	0.9646	0.9907	30 минут
U-Net++ 3 слоя	0.9565	0.9877	42 минуты

Как видно из таблицы, сеть U-Net++ с 2 сверточными слоями имеет более быстрое время обучения, а также самую высокую точность сегментации и составляет 0.9646 точность и 0.9907 IoU, чем сеть U-Net++ с 3 сверточными слоями, сеть U-Net с 2 сверточными слоями и сеть U-Net с 3 сверточными слоями. Это означает, что сеть может более точно сегментировать области на изображениях.

Несмотря на то, что сеть с 3 сверточными слоями способна изучать более сложные функции, в нашем контексте она не дала лучший результат ни с одной из архитектур. Это связано с тем, что в данной работе стояла задача классификации небольшого количества классов, а также небольшой размер входных изображений. Другие преимущества 2 сверточной сети перед 3 сверточной состоит в том, что более простую сеть проще обучать, она менее подвержена переобучению, а также обучение и оценка сети с меньшим количеством слоев требует меньше времени и вычислительных ресурсов.

Преимущества, позволяющие сети U-Net++ показать результат лучше классической U-Net состоят в ключевых особенностях архитектуры, такие как переработанные пути пропуска, которые соединяют две подсети, и использование глубокого контроля, а также использование небольших сверточных ядер. Это помогает сети лучше идентифицировать мелкие объекты и детали.

4. Результаты обучения модели

В результате сравнения различных моделей и конфигураций с помощью оптимизатора параметров была выбрана модель U-Net++ с 2 сверточными слоями. На рис. 5 показан исходный B-скан (слева) и его сегментация (справа).

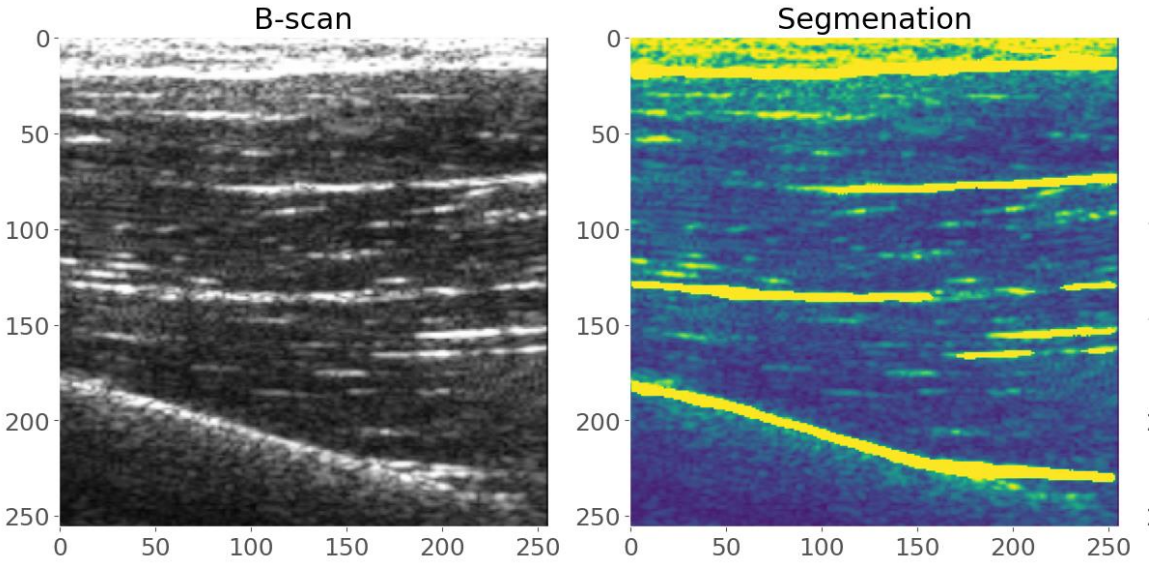


Рис. 5. Сегментация УЗИ изображения

Как видно из изображений, сеть успешно сегментирует новые изображения, что говорит о возможности ее применимости для поиска границ мышечного слоя.

5. Выводы

Данное исследование подтверждает эффективность использования нейронных сетей архитектур U-Net и U-Net++ для задач сегментации УЗИ изображений скелетных мышц.

Был проведен анализ нейросетей различной конфигурации для сегментирования изображений скелетной мышцы, тестирование готовой модели на реальных изображениях, показали потенциал развития данной медели. Применение нейросетей в медицине способствует улучшению процесса диагностики медицинских данных, а дальнейшее развитие процессов обучения и тестирования нейросетей позволят в будущем оказывать широкий спектр медицинской поддержки.

Литература

1. Gri th, J.F.: Diagnostic Ultrasound: Musculoskeletal. 2nd edn. Elsevier, (2018).
2. Cronin N.J., Finni T., Seynnes O. Fully automated analysis of muscle architecture from B-mode ultrasound images with deep learning. 2020.
3. Мищенко Е.А., Демин И.Ю. Проверка, анализ и улучшение модели нейронной сети архитектуры U-NET, применяющейся для сегментации УЗИ изображений скелетных мышц // Биосистемы: организация, поведение, управление – 2023: Сборник статей 76-ой Всероссийской с международным участием школы-конференции молодых ученых / Нижний Новгород. ННГУ, 2023. С. 217.
4. Мищенко Е.А., Демин И.Ю. Обработка изображений скелетных мышц, полученных узи прибором «БОДИСОНИК» с применением машинного обучения // Методы компьютерной диагностики в биологии и медицине – 2022: Сборник статей Всероссийской школы-семинара / под ред. проф. А.В. Скрипаля. Саратов: Изд-во Саратовский источник. 2022. С. 142-145.
5. Ronneberger O., Fischer P., and Brox T.. U-net: Convolutional networks for biomedical image segmentation. In International Conference on Medical image computing and computer-assisted intervention, pages 234–241. Springer, 2015.
6. UNet++: A Nested U-Net Architecture for Medical Image Segmentation //Zongwei Zhou, Md Mahfuzur Rahman Siddiquee, Nima Tajbakhsh, and Jianming Liang. 2018.

О МОДЕЛИ ПОТЕНЦИАЛА ДЕЙСТВИЯ КЛЕТОК МИОКАРДА[1*]

Т.Т. Нгуен, Л.У. Бахтиева

Казанский федеральный университет

Представлена модифицированная модель потенциала действия клеток миокарда, полученная на основе известных базовых моделей электрической активности элементов сердечной системы. Результаты численных экспериментов, проведенных в среде Matlab, хорошо согласуются с теоретическими и экспериментальными данными других авторов, что позволяет сделать вывод о применимости уравнений модели как в дальнейших теоретических разработках, так и в медицинской практике.

Ключевые слова: математическая модель, сердечная деятельность, потенциал действия.

1. Введение

Предлагаемая статья является продолжением исследований [1], посвященных вопросу применимости базовых дифференциальных моделей потенциала действия (ПД) [2] и [3] в реальной медицинской практике. В частности, в [1] было отмечено, что для получения реальной картины ПД, соответствующей электрокардиограмме пациента, модель [3] необходимо дополнить элементами, учитывающими влияние ионов кальция, а также исследовать возможность корректировки сердцебиения с помощью стимулирующего тока.

При построении новой математической модели авторами были использованы, помимо уравнений [2] и [3], уравнения Билера–Рейтера [4]. Проведение большого количества численных экспериментов позволило скорректировать коэффициенты модели и адаптировать ее для описания долговременной активности клеток миокарда.

2. Построение модели

ПД клеток сердца значительно отличается от ПД нервных и скелетных мышечных клеток. Одно из основных различий заключается в продолжительности ПД. В типичном нерве продолжительность ПД составляет около 1 мс. В клетках скелетных мышц продолжительность ПД составляет примерно 2-5 мс. Напротив, продолжительность сердечных потенциалов действия колеблется от 200 мс до 400 мс. Из-за разницы между ПД сердечных клеток и ПД нейронов, модель [2], построенная для описания ПД аксона, не может точно отображать активность сердечных клеток.

Другое различие заключается в роли ионов кальция в деполяризации. В нервных и мышечных клетках фаза деполяризации ПД вызывается открытием быстрых натриевых каналов. Однако в сердечных клетках поток ионов кальция продлевает продолжительность ПД и вызывает характерную фазу «плато». Проведенные компьютерные эксперименты с моделью [3], не учитывающей это различие, показали, что модель Нобла тоже нуждается в доработке. Основной ее недостаток заключается в том, что она включает только один внутренний ток, управляемый напряжением. Единственный способ заставить модель работать – это значительно расширить диапазон напряжений натриевого тока за счет уменьшения зависимости процесса активации натрия от напряжения. По сути, натриевый ток служит функцией как натриевых, так и кальциевых каналов. Кроме того, модель [3] не позволяет оценить влияние внешних токов на ПД клеток сердца. Следовательно, уравнения моделей [2] и [3] должны быть скорректированы для более точного описания характеристик клеток сердца во время генерации ПД.

[1*] Работа выполнена за счет средств Программы стратегического академического лидерства Казанского (Приволжского) федерального университета ("ПРИОРИТЕТ-2030").

Для исследования характера зависимости ПД от кальциевого тока и тока возбуждения в первое уравнение модели [3] были добавлены два параметра. Новое уравнение имеет вид

$$C_m \frac{dV_m}{dt} = -(I_{Na} + I_K + I_L + I_s - I_{st}). \quad (1)$$

В уравнении (1): I_{st} – ток стимуляции, I_s – медленный внутренний ток кальция, определяемый так же, как в модели [3], уравнениями

$$I_s = G_s df(V_m - E_s), E_s = 7.7 - 13.0287 \ln[Ca]_i, \quad (2)$$
$$\frac{d[Ca]_i}{dt} = -10^{-4} I_s + 0.07(10^{-4} - [Ca]_i).$$

Для натриевого тока I_{Na} приняты параметры активации m и деактивации h из модели [3]. Следуя методике Билера и Рейтера [4], в новую модель включены также воротные переменные медленной инактивации j, поэтому натриевый ток определяется формулой

$$I_{Na} = (kG_{Na} m^3 hj - 0.14)(V_m - E_{Na}), \quad (3)$$

однако в нее добавлен корректирующий коэффициент k, численное значение которого определяется путем проведения численных экспериментов ($k \approx 100$).

Калиевые токи I_K определяются в двух состояниях

$$I_K = I_{K1} + I_{K2},$$
$$I_{K1} = I_{K1}(V_m) = \left(1.2e^{-\frac{V_m+90}{50}} + 0.015e^{\frac{V_m+90}{60}}\right)(V_m - E_K), \quad (4)$$
$$I_{K2} = I_{K2}(V_m, t) = G_K n^4 (V_m - E_K),$$

а ток утечки $I_L = G_L(V_m - E_L)$.

Воротные переменные m, h, j, n, d, f по-прежнему связаны с напряжением V_m следующий образом

$$\frac{d\theta}{dt} = \alpha_\theta(V_m)(1 - \theta) - \beta_\theta(V_m)\theta, \quad \theta = m, h, j, n, d, f, \quad (5)$$

параметры уравнений (5) определяются зависимостями

$$\alpha_m = \frac{-0.1(V_m + 48)}{\exp\left(-\frac{(V_m+48)}{15}\right) - 1}, \quad \beta_m = \frac{0.12(V_m + 8)}{\exp\big((V_m + 8)/5\big) - 1},$$
$$\alpha_h = 0.17\exp(-\frac{V_m + 90}{20}), \quad \beta_h = \frac{1}{\exp(-(V_m + 42)/10) + 1},$$
$$\alpha_j = \frac{0.055(-V_m - 48)}{\exp\left(-\frac{(V_m+48)}{15}\right) - 1}, \quad \beta_j == \frac{0.3}{\exp(-(V_m + 2)/10) + 1},$$
$$\alpha_n = \frac{-0.0001(V_m+50)}{\exp\left(-\frac{(V_m+50)}{10}\right)-1}, \quad \beta_n = 0.002\exp\left(-\frac{V_m+90}{80}\right), \quad (6)$$
$$\alpha_d = \frac{0.095(\exp(0.01(V_m - 15)))}{\exp(-0.071(V_m - 15)) + 1}, \quad \beta_d = \frac{0.07(\exp(-0.017(V_m + 24))}{\exp\big(0.05(V_m + 24)\big) + 1},$$
$$\alpha_f = \frac{0.012(\exp(-0.008(V_m + 8)))}{\exp(0.15(V_m + 8)) + 1}, \quad \beta_f = \frac{0.0065(\exp(-0.02(V_m + 10))}{\exp\big(-0.2(V_m + 10)\big) + 1},$$

где константы скорости $\alpha_j, \beta_j, \alpha_d, \beta_d, \alpha_f, \beta_f$ получены с использованием процедуры оценки параметров, указанной в [4].

3. Численные эксперименты

Система уравнений (1) – (6) решалась численно средствами программы Matlab (R2019). Для удобства расчетов и возможности интерактивной работы с моделью был разработан пользовательский интерфейс (рисунок 1).

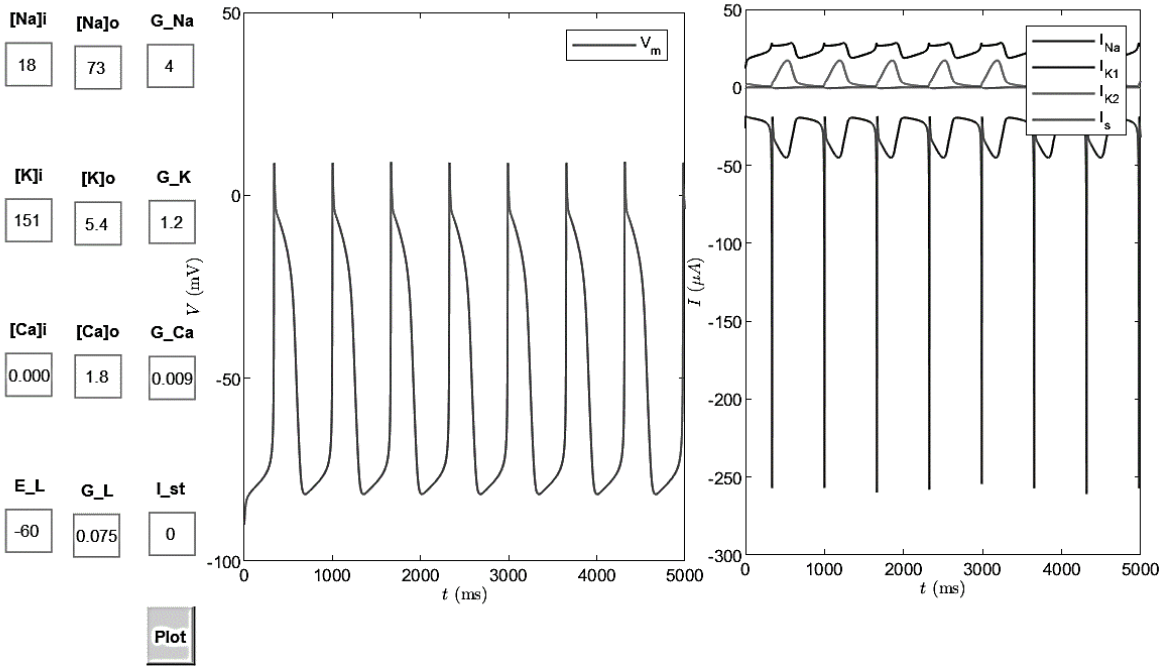


Рис. 1. Пользовательский интерфейс

В таблице 1 представлены значения параметров построенной модели, соответствующие нормальному сердцебиению. Концентрации натрия и калия внутри и вне клетки соответствуют значениям ионных потенциалов E_{Na} = 35 мВ и E_K = 100 мВ.

Таблица 1. Концентрация внутри- и внеклеточных ионов и их проводимость

$[Na]_i = 18$ ммол/Л	$[Na]_o = 73$ ммол/Л	$G_{Na} = 400$ мСи/см^2
$[K]_i = 151$ ммол/Л	$[K]_o = 5.4$ ммол/Л	$G_K = 1.2$ мСи/см^2
$[Ca]_i = 0.0001$ ммол/Л	$[Ca]_o = 1.8$ ммол/Л	$G_{Ca} = 0.09$ мСи/см^2

Рисунок 2 иллюстрирует характерное изменение продолжительности ПД, наблюдаемое при экспериментальном вмешательстве, увеличивающем внутриклеточную концентрацию кальция. Чтобы четко увидеть изменение, ПД рассматривается в течение 1с. Полученные результаты подтверждают эксперименты модели [4], где подчеркнуто влияние кальция на «плато».

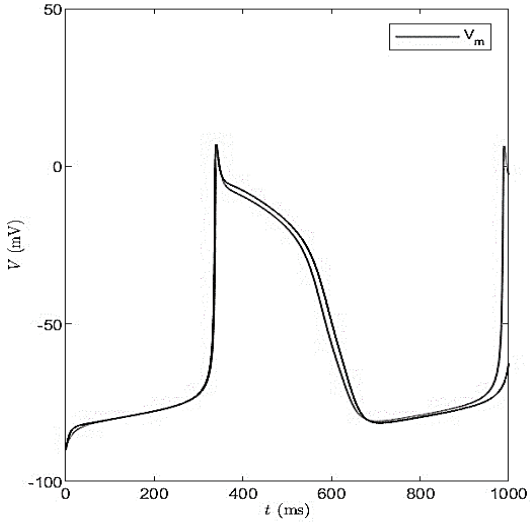
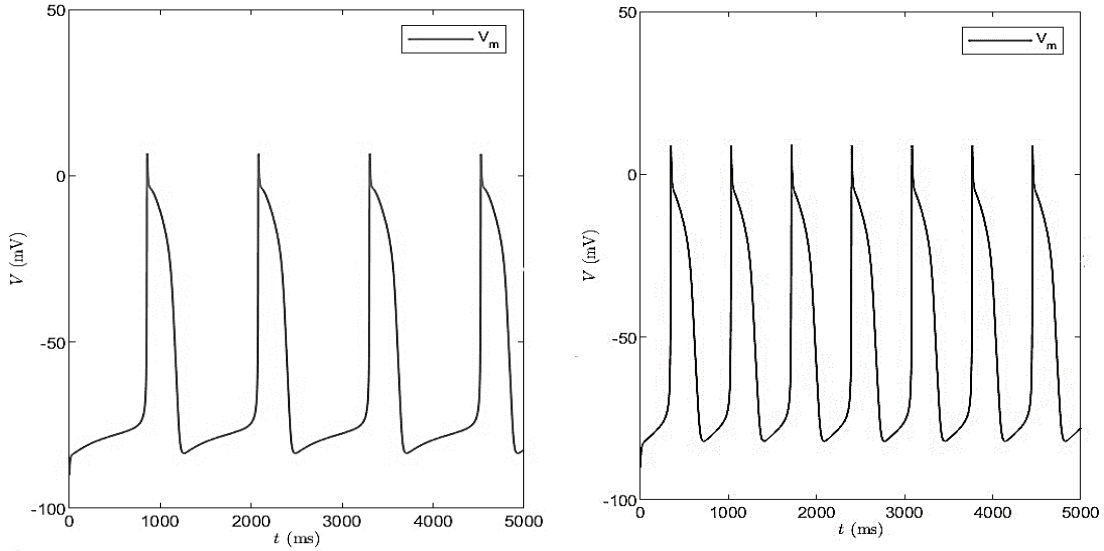


Рис. 2. Наблюдаемое «плато» при изменении концентрации ионов кальция на ПД

На рисунках 3 представлены графики, характеризующие влияние стимулирующего (внешнего) тока на ПД. В частности, если с увеличением внеклеточной концентрации ионов калия ПД становится реже (рисунок 3а), то добавив внешний ток (рисунок 3б), можно вернуть ПД к нормальному ритму.



а) *б)*

Рис. 3. Влияние стимулирующего тока на ПД

4. Выводы

Авторами предложена новая модель ПД клеток миокарда. Для преодоления ограничений предыдущих базовых моделей добавлены уравнения, описывающие влияние ионов кальция, а также внешний стимулирующий ток для управления скоростью ПД по мере необходимости. В уравнение тока натрия включен новый коэффициент k. Результаты численных экспериментов, проведенных с новой моделью, хорошо согласуются с теоретическими и экспериментальными данными других авторов [5-10], а также корректно описывают реальную картину сердцебиения, полученную с помощью электрокардиографа. Это позволяет сделать вывод о применимости уравнений модели как в дальнейших теоретических разработках, так и в медицинской практике.

Литература

1. Нгуен Т.Т., Бахтиева Л.У. О применимости математической модели Нобла к исследованию потенциала действия клеток миокарда // Информационные и математические технологии в науке и управлении. 2023. № 2(30). С. 75-82. DOI: 10.25729/ESI.2023.30.2.008.
2. Hodgkin A., Huxley A. A quantitative description of membrane current and its application to conduction and excitation in nerve // J. Physiol. 1952. Vol. 117. № 4. P. 500–544.
3. Noble D.A modification of the Hodgkin-Huxley equation applicable to Purkinje fibers action and pace-maker potentials // J. Physiol. 1965. Vol. 160. P. 317–352.
4. Beeler G., Reuter H. Reconstruction of the action potential of ventricular myocardial fibers // J. Physiol. 1977. Vol. 268. P. 177–210.
5. Ten Tusscher K.H., Panfilov A.V. Alternans and spiral breakup in a human ventricular tissue model // J Physiol. 2006. Vol. 291. P. 1088–1100.
6. Luo C.H., Rudy Y. A model of the ventricular cardiac action potential, depolarization, repolarization and their interaction // Circ Res. Vol. 68. P. 501-1526.
7. DiFrancesco, Noble D. A model of cardiac electrical activity incorporating ionic pumps and concentration changes // Phil Trans R Soc Lond. 1985. Vol. 307. P. 353–398

8. Kenneth T. MacLeod, Steven B. Marston, Philip A. Poole Wilson, Nicholas J. Severs, and Peter H. Sugden. Cardiac myocytes and the cardiac action potential. Oxford Textbook of Medicine. 2010. P. 2604-2618.
9. Michael Pan, Peter J. Gawthrop, Kenneth Tran, Joseph Cursons, Edmund J.C. Bond graph modelling of the cardiac action potential: Implications for drift and non-unique steady states // Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Science. 2018. A 474: 20180106.
10. Wilders R. Computer modelling of the sinoatrial node // Med Bio Eng Comput. 2007. Vol. 45. P. 189–207.

РАЗРАБОТКА ЭВРИСТИЧЕСКОГО АЛГОРИТМА НА БАЗЕ ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНОЙ МОДЕЛИ ГЛУБОКОГО ОБУЧЕНИЯ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ КАЧЕСТВА УГЛЯ ПО ЕГО ФОТОГРАФИЧЕСКИМ ДАННЫМ

П.А. Пылов, Р.В. Майтак, А.В. Протодьяконов

Кузбасский государственный технический университет им. Т.Ф. Горбачева

Цифровая трансформация является неотъемлемой частью любого развитого государства, поэтому автоматизация различных производственных процессов является актуальной темой приложения информационных технологий. В рамках статьи исследуется разработанная авторами эвристика для определения качества угля, перемещаемого по конвейерной ленте на основании его фотографических данных. Подобная автоматизация существенно облегчит работу специалистов лабораторий горнодобывающих комплексов и максимально снизит ошибку, носящую характер человеческого фактора.

Ключевые слова: интеллектуальные технологии, прикладной искусственный интеллект, глубокое обучение, горнодобывающая промышленность.

1. Введение

Интеллектуальные технологии с каждым днём позволяют автоматизировать всё больше различных производственных процессов. Одним из примеров старейшего производственного процесса является добыча твердого топлива, которое первоначально использовалось для бытовых нужд человечества [1].

С ростом уровня индустриализации общества уголь только укрепил свою значимость и ценность, так как стал необходимым компонентом в металлургической и химической промышленности [2]. Не секрет, что любая промышленность предъявляет высокие требования к исходным компонентам, так как они напрямую влияют на конечный результат изготавливаемого продукта. Не стал исключением и уголь, для которого была разработана собственная маркировочная система классификации, определяющая рациональное промышленное использование твердого горючего.

Для оценки качества конкретной марки угля на горнодобывающих предприятиях функционируют собственные лаборатории качества. Их основной целью является решение задачи сепарации и маркировки отдельных экземпляров угля на хорошее и неудовлетворительное качество.

Подобные лаборатории оценки качества угля существуют уже не одно столетие [3], а сама технология детерминации качества не претерпела значительных изменений, так как с развитием научно-технологического прогресса обновлялось только оборудование, облегчающее работу сотрудников лабораторий, а не сама технология.

Современные информационные технологии, а также развитие компьютерных систем (в том числе появление суперкомпьютеров) значительно облегчили программную реализацию адаптивных алгоритмов прогнозирования, которые чаще причисляют к общему наименованию «модели искусственного интеллекта» [4]. С помощью этих алгоритмов можно решать разнообразные творческие задачи, в том числе открывается возможность решить задачу определения качества угля разных марок на основании фотографических данных экземпляров твердого горючего топлива.

В рамках данной статьи авторами была описана разработка собственной эвристики определения качества угля, общая концепция которой является универсальной и поэтому подходит для детерминации качества всех марок твердого горючего топлива.

2. Эвристический алгоритм

Выбор основного материала для оценки качества угля был остановлен на фотографии, поскольку такое решение обосновано несколькими ключевыми факторами:

1. Фотография является гораздо более простым способом фиксации данных об экземпляре твердого горючего топлива в отличие от «ручного» исследования образцов;
2. Увеличивается масштаб автоматизации процесса определения качества угля: специалисты лаборатории теперь будут участвовать только в роли сотрудников отдела валидации результатов, то есть их участие в процессе сводится к минимально возможному из всех предполагаемых вариантов;
3. Благодаря увеличенному масштабу автоматизации процесса (предыдущий пункт), многократно возрастает скорость аналитики экземпляров угля и целевой маркировки (присвоения класса качества) за счет цифровой трансформации самой процедуры анализа.

Авторский эвристический алгоритм основывается на предположении о том, что фотографическая съемка будет интегрирована над конвейерной лентой, что позволяет максимально сократить затраты по неэффективному перемещению угля. Перемещаемый по конвейерной ленте уголь, достигая конца ленты, сепарируется по принципу качества (рисунок 1). Управляющий сигнал о перемещении в ту или иную группу качества будет передаваться от интеллектуальной системы.

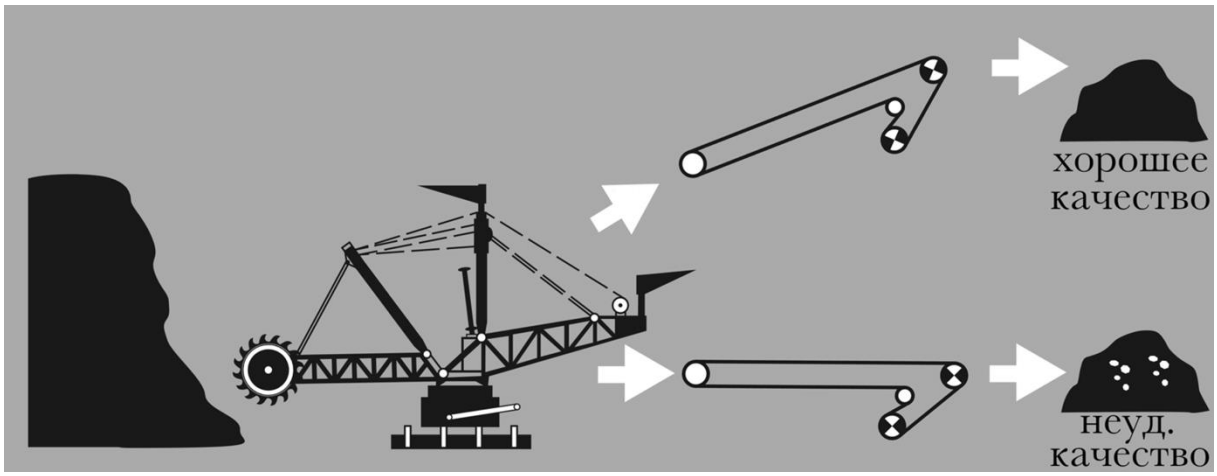


Рис. 1. Сепарация угля после его прохождения по конвейерной ленте

На основании схемы перемещения угля (рисунок 1), становится логически очевидным тот факт, что принятие решение о сепарации должно быть передано интеллектуальной системой за время, меньшее, чем отрезок времени, необходимый для прохождения каждым экземпляром угля транспортировочной ленты конвейера.

Для выполнения обозначенного требования необходимо обеспечить быструю функциональность модели глубокого обучения, однако, предварительно необходимо максимально нивелировать эффект ошибки от неправильной классификации с помощью эвристического алгоритма.

Эвристический алгоритм зиждется на последовательной проверке каждого экземпляра угля, перемещаемого по конвейерной ленте, несколькими камерами:

1. Анализ образца микроскопной камерой;
2. Получение данных с камеры сейсмоакустического просвечивания (оценка плотности);
3. Объемная оценка угля с помощью камеры трехмерной сцены.

Графическое представление эвристического алгоритма изображено на рисунке 2.



Рис. 2. Эвристический алгоритм детерминации качества угля на основании данных с камер

Все устройства (рисунок 2) будут закреплены над транспортировочной лентой и работать в автоматическом режиме. Данные со съемки микроскопной и объемной камеры представляются в графическом виде, а информация с камеры сейсмоакустической оценки плотности образца угля представляется в виде числа с плавающей точкой. За обработку разнотипных данных отвечает модуль разработанной интеллектуальной модели, основанной на базе модели глубокого обучения (рисунок 3). Централизованная обработка позволяет существенно сократить время на получение итоговой классификации от модели глубокого обучения [5].

```
1.Сверточные слои для анализа графических данных (микроскопная и объемная съемка):
a.→Convolutional Layer 1: Conv2D + ReLU: Первый сверточный слой;
b.→MaxPooling Layer 1: MaxPooling2D: Первый слой подвыборки;
c.→Convolutional Layer 2: Conv2D + ReLU;
d.→MaxPooling Layer 2: MaxPooling2D;
e.→Flatten Layer: Преобразует данные в одномерный вектор.

2.Полносвязные слои для обработки числовых данных:
a.→Полносвязный слой: Dense + ReLU;
b.→Dropout Layer.

3.Слой конкатенации обработки графических и числовых данных:
a.→Объединение выходов сверточных слоев и полносвязных слоев нейронной сети;
b.→Полносвязный слой: Dense + ReLU.

4.Выходной слой:
a.→Выходной полносвязный слой: Dense + Softmax (решение задачи классификации).
```

Рис. 3. Программная архитектура модели глубокого обучения для совместной обработки графических и числовых данных

Результаты точности разработанной интеллектуальной модели при выполнении классификации для наиболее распространенных марок угля «антрацит» (за счёт самого большого процентного содержания углерода в своем составе – 92-98%, этот тип угля кроме промышленного топлива применяется также для производства электродов, полупроводников и очистных фильтров) и «длиннопламенный» (широко применяется в энергетике и для отопления в бытовых и промышленных котлах) были проанализированы и представлены в виде результирующей таблицы 1.

Таблица 1. Результаты точности классификации угля разных марок разработанной интеллектуальной системой

Марка угля	**Целевой класс**	**Точность прогнозирования по метрике f-меры**
Антрацит	Хорошее качество	0.87
	Неудовлетворительное качество	0.98
Длиннопламенный	Хорошее качество	0.91
	Неудовлетворительное качество	0.94

Литература

1. Кабиес, Дж.: Влияние формы данных на качество прогнозирования опасности подземных толчков в шахтах с использованием нейронных сетей. Инженерно-геологические изыскания, 24(5), 2005, 980-1147.
2. Лесняк А., Исаков З. Пространственно-временная кластеризация сейсмических событий и оценка опасности на угольной шахте Забже-Бельшовице, Польша. Инт. Журнал механики горных пород и горных наук, 46(5), 2009, 918-928методы для задач выпуклой и линейной оптимизации. Челябинск: Изд-во ЮУрГУ, 2009. 200 с.
3. Буковска М. Вероятность возникновения горного взрыва в районе Верхнесилезского угольного бассейна зависит от естественных условий добычи. Журнал горных наук, 42(6), 2006, 570-577.
4. Журавлёв Ю.И. Об алгебраическом подходе к решению задач распознавания или классификации // Проблемы кибернетики. 1978. 64 с.
5. Пылов П.А., Майтак Р.В., Дягилева А.В. Разработка интеллектуальных систем для обработки сигналов с датчиков давления: монография / П.А. Пылов. – Москва: Инфра-Инженерия, 2023. – 156 с. ISBN: 978-5-9729-1515-6.

РЕАЛИЗАЦИЯ РАЗРЕШАЮЩЕГО АЛГОРИТМА ДЛЯ ТЕОРИИ ПЛОТНОГО ЛИНЕЙНОГО ПОРЯДКА БЕЗ КОНЦЕВЫХ ТОЧЕК НА ЯЗЫКЕ HASKELL

В.В. Разин

Нижегородский госуниверситет имени Н.И. Лобачевского

Реализация разрешающих алгоритмов является актуальной задачей в разделе математической логики. В рамках данной работы демонстрируется программа на Haskell, позволяющая проверять истинность задаваемых формул на рациональных числах при помощи алгоритма элиминации кванторов.

Ключевые слова: плотный линейный порядок без концевых точек, алгоритм элиминации кванторов, алгоритмическая разрешимость.

1. Введение

В логике предикатов можно сформулировать теорию плотного линейного порядка без первого и последнего элементов [1]. Моделями этой теории являются, например, рациональные и действительные числа. Оказывается, что эта теория разрешима [2], то есть существует алгоритм, который по любой формуле, содержащей отношение порядка, логические связки и кванторы, говорит, следует ли эта формула из теории или нет (эквивалентно, истинна ли формула на рациональных числах) [3]. Один из таких алгоритмов называется элиминация (устранение) кванторов [4].

В рамках данной работы предлагается описание реализации разрешающего алгоритма для теории плотного линейного порядка без концевых точек на языке Haskell [5].

2. Реализация алгоритма

2.1. Типы данных

Для работы алгоритма элиминации кванторов написаны типы данных переменной, квантора, предиката и предложения со всеми необходимыми функциями для работы алгоритма элиминации кванторов.

Тип данных переменной представляет собой строку. Сравнение двух переменных будет является сравнением двух строк. Печать переменной интерпретируется печатью строки.

Тип данных квантора представляет собой пару, состоящую из типа квантора и переменной. Печать квантора является печатью строки с названием типа данных и пробелом после, а также печатью самой переменной. Сравнение двух кванторов интерпретируется наследуемой стандартной встроенной функцией Eq [6].

Тип данных предиката представляет собой либо логический ноль или единицу, либо обозначение знака больше или меньше с двумя переменными. Печать предиката является печатью переменной с печатью знака отношения (“<” или “=”), либо печатью “0” в случае логического нуля, либо печатью “1” в случае логической единицы. Сравнение двух предикатов интерпретируется наследуемой стандартной встроенной функцией Eq, кроме случая сравнения двух предикатов равенства, для них используется функция сравнения переменных предикатов во всех их возможных парах, образованными взятием переменных первого и второго предиката (например, предикат y = x тождественен предикату x = y).

Тип данных формулы индуктивен и представляет собой либо одиночный предикат, либо конъюнкцию списка формул, либо дизъюнкцию списка формул. При этом элемент конъюнкции списка формул не может быть сам конъюнкцией списка формул. Аналогично для дизъюнкции списка формул. Печать формулы является функцией, основанную на рекурсивном проходе

формулы с печатью предиката и необходимых знаков конъюнкции и дизъюнкций со скобками в зависимости от шага рекурсии. Сравнение двух формул интерпретируется рекурсивной функцией, основанную на сравнении двух предикатов или сравнении других возможных пар выражений в зависимости от шага рекурсии. Функции взятия отрицания, упрощения, приведения к ДНФ и элиминации квантора для формулы являются рекурсивными функциями, где на шагах рекурсии в зависимости от встреченных выражений выполняются необходимые вычисления. Функция упрощения формулы и элиминации квантора базируются на описанных законах математической логики и аксиомах плотного линейного порядка без концевых точек для заданной структуры.

Тип данных предложения представляет собой стек кванторов и формулу. Для печати данной структуры написана отдельная функция печати стека кванторов и печать самой формулы.

2.2. Описание алгоритма

Алгоритм на каждом шаге принимает предложение в качестве аргумента и выполняет следующее:

1. Если формула является логическим нулем или единицей, то алгоритм останавливается и выдает истину в случае логической единицы и ложь в противном случае. Если формула не является логическим нулем или единицей, то если стек кванторов является пустым, то это означает ошибку и на вход было подано некорректное выражение (оставшиеся переменные в формуле никак не связаны с переменными в стеке кванторов). Если формула не является логическим нулем или единицей и стек кванторов не пуст, то смотрим на первый в стеке квантор. Если это квантор существования, то шаги 2 и 7 пропускаем.

2. Заменяем формулу на ее отрицание (с целью замены квантора общности на квантор существования). Функция отрицания рекурсивно проходит по формуле и заменяет ее содержимое по законам де Моргана.

3. По возможности упрощаем формулу при помощи описанных законов матлогики. Остановом в упрощении является то, что упрощенная формула эквивалентна формуле, которую требовалось упростить (значит упрощений не произошло). Функция упрощения конъюнкции или дизъюнкции списка формул проходит по списку и убирает все повторы (повтором считается содержание в одном списке эквивалентных элементов). В случае конъюнкции списка формул удаляются все логические единицы в данном списке, если список оказался пустым, то данный список заменяется на логическую единицу. В случае дизъюнкции списка формул удаляются все логические нули в данном списке, если список оказался пустым, то данный список заменяется на логический ноль. Упрощение конъюнкции или дизъюнкции списка формул рассматривает все возможные пары данного упрощенного списка на предмет упрощения и при их упрощении строит новый упрощенный список с его всевозможными парами и проходит по ним рекурсивно до тех пор, пока не будут рассмотрены все пары или останется список, содержащий один или ноль элементов, который будет заменен на этот единственный упрощенный элемент и логический ноль в случае пустого списка дизъюнкции или логическую единицу в случае пустого списка конъюнкции. Упрощение одиночного предиката представляет собой упрощение, согласно описанным законам математической логики.

4. Приводим формулу к ДНФ. Функция приведения формулы к ДНФ рекурсивно приводит формулу к дизъюнкции списка формул, состоящих из элементарных конъюнкций или просто к элементарной конъюнкции.

5.1 Рассматриваем все возможные пары конъюнкции или дизъюнкции списка формул, если находим такую, которую можно заменить на одиночный предикат, то строим новый упрощенный список с его всевозможными парами и так рекурсивно до тех пор, пока не рассмотрим все пары.

5.2 Рассматриваем все предикаты списка конъюнкций или дизъюнкций формул, если в предикате содержится переменная, которая является переменной рассматриваемого на данный момент квантора, то убираем данный предикат из этого списка.

6. Повторяем действия, описанные в пункте 3.

7. Повторяем действия, описанные в пункте 2.

2.3. Достоинства реализации алгоритма

Основным достоинством реализации данного алгоритма является удобное представление формулы в виде дизъюнкции или конъюнкции списка формул, не содержащих в себе дизъюнкцию списка формул и конъюнкцию списка формул соответственно, или одиночного предиката. Благодаря такому представлению, в общем случае запись формулы более компактна, упрощается способ печати формулы, применение законов ассоциативности и коммутативности (для этого достаточно рассматривать все возможные пары данных списков), а также элиминировать кванторы в слогах ДНФ (для этого достаточно рассматривать все возможные пары данных списков), упрощается само приведение формулы к ДНФ. Также в общем случае сокращается запись печати формулы.

2.4. Вычислительная сложность алгоритма

Теория плотного линейного порядка первого порядка без концевых точек является PSPACE – полной [7].

3. Примеры использования

Пусть задано предложение $A = \forall x\, \forall y\, \exists z\, \forall u\, [(x \le z)\&[(z \le u)|(u < y)]]$.

Запишем данное предложение в разработанной программе:

```
    quant0 = [ForAll x, ForAll y, Exist z, ForAll u]
    form0 = And [Or [Solo(Less x z), Solo(Equal x z)],Or
[Solo(Less z u), Solo(Equal z u), Solo(Less u y)]]
    sent0 = Sentence quant0 form0
    demo0 = showExample sent0
```

Рис. 1. Описание предложения A в разработанной программе

Передав программе вычисление demo0, получаем результат: "The sentence 'ForAll x ForAll y Exist z ForAll u . (x<z|x=z)&(z<u|z=u|u<y)' is not linear order theorem.". Получается, что A не является теоремой.

Пусть задано предложение $B = \forall x\, \exists y\, \forall z\, [[(x \le y)\&(z < y)]|[(x \le z)\&(y < z)]]$.

Запишем данное предложение в разработанной программе:

```
    quant1 = [ForAll x, Exist y, ForAll z]
    form1 = Or [And[Or[Solo(Less x y), Solo(Equal x
y)],Solo(Less z y)],And[Or[Solo(Less x z),Solo(Equal x
z)],Solo(Less y z)]]
    sent1 = Sentence quant1 form1
    demo1 = showExample sent1
```

Рис. 2. Описание предложения B в разработанной программе

Передав программе вычисление demo1, получаем результат: "The sentence 'ForAll x Exist y ForAll z . (x<y|x=y)&z<y|(x<z|x=z)&y<z' is not linear order theorem.". Получается, что B не является теоремой.

4. Результаты

В ходе этой работы была написана программа [8], позволяющая проверять истинность задаваемых формул на рациональных числах.

5. Заключение и выводы

В ходе данной работы была написана реализация разрешающего алгоритма для теории плотного линейного порядка без концевых точек на языке Haskell.

В дальнейшем планируется совершенствование текущей реализации с более сложным представлением переменных для повышения функциональности данного программного обеспечения, рассмотрение других теорий математической логики [9] и их описание на функциональных языках программирования [10].

Литература

1. Фролов А.Н. Линейные порядки. Теоремы кодирования //Ученые записки Казанского университета. Серия Физико-математические науки. – 2012. – Т. 154. – №. 2. – С. 142-151.
2. Пеано А., Подымов В.В. Математическая логика. – 1973.
3. Галиев Ш.И. Математическая логика и теория алгоритмов //АН Туполева. – 2002.
4. Ершов Ю.Л. Логики и элементарные теории. – Российский фонд фундаментальных исследований, 1998. – №. 96-01-01552.
5. Hudak P., Fasel J.H. A gentle introduction to Haskell //ACM Sigplan Notices. – 1992. – Т. 27. – №. 5. – С. 1-52.
6. Magalhaes J.P. et al. A generic deriving mechanism for Haskell //ACM Sigplan Notices. – 2010. – Т. 45. – №. 11. – С. 37-48.
7. Kozen D.C. Theory of computation. – Heidelberg : Springer, 2006. – Т. 121.
8. Razin V. Quantifier Elimination Algorithm [Электронный ресурс] - URL: https://github.com/razinw/QuantifierEliminationAlgorithm (дата обращения 09.07.2022).
9. Ершова Т.И. и др. Математическая логика //ББК 60 Н 34. – 2021. – С. 36.
10. Кобелев И.А., Иванова Л.В., Чекушина В.Е. Два типа языков программирования //Современные проблемы науки и образования. – 2014. – №. 4. – С. 56-56.

АДАПТАЦИЯ БУСТИНГА НЕЙРОННЫХ СЕТЕЙ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ PINN[1*]

Ю.А. Родимков, А.М. Трыкин

Нижегородский государственный университет им Н.И. Лобачевского

Глубокое обучение все больше оказывает влияние на различные сферы в мире, расширяя свою область применения. В последние годы набирает популярность подход Physics-Informed Neural Networks (PINN), когда в нейронные сети закладываются исходные физические законы, что может позволить исследовать процессы, происходящие в динамических системах. Мы предлагаем модификацию метода бустинга для решения задач с использованием PINN. Эксперименты показали, что использование бустинга в задаче с решением уравнения диффузии позволяет достичь результата на уровне машинной точности в одинарной точности. При этом не требуется дополнительных модификаций уравнений или кода, кроме замены самого подхода к обучению. Мы наблюдаем что использование предлагаемого подхода может упростить обучение нейронных сетей и улучшить точность аппроксимации.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения, глубокое обучение, нейронные сети с учетом физики, прямое моделирование.

1. Введение

Глубокое обучение начинает влиять на все большее количество областей в мире. Осуществляются попытки с помощью методов глубокого обучения создать аналог классическому компьютерному моделированию, основанному на численном моделировании. В последние годы набирает популярность подход Physics-Informed Neural Networks (PINN) [1], когда в нейронные сети закладываются исходные физические законы, что потенциально может позволить исследовать процессы в динамических системах, либо ускорить классическое моделирование.

Подход основан на возможности использования автоматического дифференцирования при обучении нейронной сети. Современные фреймворки глубокого обучения поддерживают возможность дифференцирования нейронной сети без дополнительных действий со стороны пользователя. Это позволяет вычислять необходимые частные производные в дифференциальных уравнениях, например, $\frac{\partial u}{dt}$ и $\frac{\partial^2 u}{dt^2}$. Данная возможность позволяет напрямую встраивать дифференциальные уравнения в функцию ошибки нейронной сети. Например, для волнового уравнения можно минимизировать MSE($\frac{\partial^2 u}{dx^2} - \frac{\partial^2 u}{dt^2}$), где MSE – среднеквадратичная ошибка.

Полная процедура обучения нейронной сети с помощью PINN выглядит следующим образом. Изначально происходит генерация точек, в которых будет минимизироваться ошибка. Далее происходит прямой проход по нейронной сети. На основании предсказанного ответа рассчитываются частные производные. Далее для каждого ограничения (начального, граничного условия и дифференциального уравнения) подсчитывается невязка, вычисляется ошибка и суммируется результат. Суммарная ошибка используется для обучения стандартными методами для области глубокого обучения.

[1*] Работа частично выполнена в рамках научно-образовательного математического центра ННГУ «Математика технологий будущего» (при поддержке Министерства науки и высшего образования, проект №075-02-2023-945).

2. Бустинг нейронных сетей для PINN

Бустинг – это метод обучения ансамбля моделей, позволяющий увеличить точность, при котором каждая последующая модель учится на ошибках предыдущей [**Ошибка! Источник ссылки не найден.**]. Например, в случае задачи регрессии последующая нейронная сеть учится на разности верных ответов и суммы предсказаний всех предыдущих моделей.

Изобретение AdaBoost [**Ошибка! Источник ссылки не найден.**] сильно изменило область анализа данных. Данный метод стал одним из наиболее распространенных при решении задач из разных областей от анализа табличных данных до анализа изображений. С использованием идеи бустинга построены многие методы машинного обучения. Один из популярнейших методов в классическом машинном обучении является градиентный бустинг деревьев решений [**Ошибка! Источник ссылки не найден.**]. Авторы [**Ошибка! Источник ссылки не найден.**] предложили свой подход для модификации бустинга для решения задач PINN. Они демонстрируют ошибку на уровне машинной точности на нескольких уравнениях. При этом их подход требует модификации исходного алгоритма и дифференциального уравнения, что является недостатком данного подхода.

Классическую схему, на которую опирается наш подход, можно представить следующим образом. Пусть X – множество точек для обучения. Пусть заданы значения для некоторой функции $\vec{y} = f(X)$. Тогда под бустингом нейронных сетей будем подразумевать множество нейронных сетей $BN_n = \{Net_0, Net_1, \dots, Net_{n-1}\}$ и множество ошибок $e = \{e_0 = 1, e_1, \dots, e_{n-1}\}$.

В начале определим процедуру предсказания для бустинга из n моделей: $BN_n(X) = \sum_{i=0}^{n-1} e_i \times Net_i(X)$.

Обучение моделей происходит следующим образом.

1. Обучение первой модели происходит классическим способом.
2. Далее для обучения i-ой модели на основании истинных и предсказанных значений определяется ошибка $e_i = \|\vec{y}_{i-1} - e_{i-1} \times Net_{i-1}(X)\|$ и вычисляется $\vec{y}_i = \frac{\vec{y}_{i-1} - Net_{i-1}(X)}{e_i}$. Для всех моделей до $i-1$ включительно фиксируем веса.
3. Сеть Net_i обучается восстанавливать функцию $\vec{y}_i$.
4. Для каждой модели $i = \overline{1,n}$ повторяются этапы (2-3).

В случае использования бустинга для PINN такой подход невозможен, так как нам не известен истинный ответ. Но его можно модифицировать для использования в задачах PINN следующим образом.

1. Обучение первой модели происходит классическим способом для задач PINN.
2. Рассчитываем и сохраняем производные с $i-1$ шага $derivative_i = derivative_{i-1} + AUTODIFF(e_{i-1} \times Net_{i-1}(X))$. Для всех моделей до $i-1$ включительно фиксируем веса.
3. Далее вычислим предсказания с учетом уже обученных моделей $\vec{y}_i = \sum_{j=0}^{i} e_i \times Net_i(X)$.
4. К вычисленным производным добавим производную с текущей обучаемой модели $derivative = AUTODIFF(e_i \times Net_i(X)) + derivative_i$.
5. Нормируем ошибку: $errors = \frac{errors}{e_i}$.
6. Для каждой модели $i = \overline{1,n}$ повторяются этапы (2-5).

В качестве нормы в своих экспериментах мы использовали L_1-норму.

3. Результаты

Для демонстрации возможности предлагаемого подхода рассмотрим задачу решения уравнения диффузии в следующей постановке.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - e^{-t}(\sin(\pi x) - \pi^2 \sin(\pi x))$$
$$x \in [-1, 1], \qquad t \in [0, 1]$$
$$u(x, 0) = sin(\pi x), \qquad u(-1, t) = u(1, t) = 0$$

Известно, что данная задача имеет решение в виде $u(x,t) = e^{-t}sin(\pi x)$.

Для аппроксимации уравнения диффузии мы подобрали следующие гиперпараметры. Мы использовали Resnet-подобную [**Ошибка! Источник ссылки не найден.**] архитектуру из полносвязных слоев. Сеть состояла из 3 блоков по 3 слоя в блоке с 78 нейронами. Мы рассмотрели бустинг, состоящий вплоть до 4 одинаковых моделей. В качестве функции активации использовался гиперболический тангенс. Нейронная сеть обучалась в двух конфигурациях: долгая тренировка – 15000 итераций с использованием оптимизатора Адам и 15000 итераций с помощью LBFGS и быстрая тренировка – 8000 итераций с использованием оптимизатора Адам и 4000 итераций с помощью LBFGS. Для обучения мы использовали следующее количество точек в областях: в пространственно-временной области – 2000, для начальной области – 250 и 200 точек для граничной области. Мы проводили обучение в одинарной и двойной точностях. Тестирование мы проводили в двойной точности, в частности это важно при вычислении ответа, чтобы минимизировать влияние ошибки при вычислении синуса и экспоненты в правильном ответе.

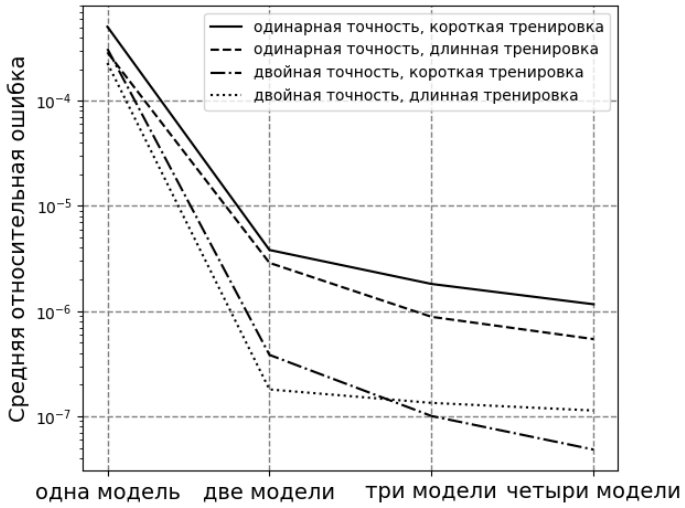


Рис. 1. Результат обучения в двойной и одинарной точности бустинга моделей. Представлены результаты измерения относительной ошибки для разного числа моделей при быстром и долгом обучении моделей. При подсчете относительной ошибки исключены значения, меньше 10^{-15}

4. Заключение

С помощью бустинга мы смогли достичь относительной ошибки на уровне 10^{-6} в одинарной точности на примере решения уравнения диффузии. При этом достичь ошибки на уровне 10^{-13} или 10^{-14} в двойной точности в данной примере пока не удается. При увеличении числа моделей в бустинге ошибка уменьшается не линейно, а медленнее. Данный эффект связан с тем, что сложность аппроксимации нарастает. Каждая последующая модель решает более сложную задачу, поэтому и модель, и время необходимое на обучение должно расти, для достижения наилучшего результата. Но мы предполагаем, что, используя этот подход, можно получить результат аппроксимации, ограниченный вычислениями в двойной точности. В частности, большой интерес представляют подходы, основанные на разделении области на несколько подобластей [**Ошибка! Источник ссылки не найден.**]. Мы считаем, что данный подход имеет большой потенциал в связке с идеей бустинга, что может позволить использовать PINN наравне с численным моделированием в некотором классе задач. Подробнее результаты будут представлены в докладе.

Литература

1. Raissi M., Perdikaris P., Karniadakis G.E. Physics-informed neural networks: A deep learning framework for solving forward and inverse problems involving nonlinear partial differential equations //Journal of Computational physics. – 2019. – Т. 378. – С. 686-707.

2. Schapire R.E. The strength of weak learnability //Machine learning. – 1990. – Т. 5. – С. 197-227.
3. Freund Y., Schapire R.E. A desicion-theoretic generalization of on-line learning and an application to boosting //European conference on computational learning theory. – Berlin, Heidelberg : Springer Berlin Heidelberg, 1995. – С. 23-37.
4. Friedman J.H. Greedy function approximation: a gradient boosting machine //Annals of statistics. – 2001. – С. 1189-1232.
5. Wang Y., Lai C.Y. Multi-stage Neural Networks: Function Approximator of Machine Precision //arXiv preprint arXiv:2307.08934. – 2023.
6. He K. et al. Deep residual learning for image recognition //Proceedings of the IEEE conference on computer vision and pattern recognition. – 2016. – С. 770-778.
7. Moseley B., Markham A., Nissen-Meyer T. Finite Basis Physics-Informed Neural Networks (FBPINNs): a scalable domain decomposition approach for solving differential equations //Advances in Computational Mathematics. – 2023. – Т. 49. – №. 4. – С. 62.

АНАЛИЗ ЭПИКАРДИАЛЬНЫХ ЭЛЕКТРОГРАММ СРЕДСТВАМИ ИСКУССТВЕННОГО ИНТЕЛЛЕКТА[1*]

А.В. Рыбкин, Р.О. Смирнов, Е.Е. Котихина, Д.А. Карчков, В.А. Москаленко, Г.В. Осипов, Л.А. Смирнов

Нижегородский госуниверситет им. Н.И. Лобачевского

Перспективной задачей в исследовании работы сердца является применение искусственного интеллекта для автоматизации анализа электрограмм биоэлектрической активности миокарда. Представленная работа посвящена разработке программного комплекса обработки электрограмм, главной частью которого является сегментирующая нейронная сеть на основе архитектуры UNet. По предварительным тестам, была достигнута точность сегментации в районе 0.77 метрики F1.

Ключевые слова: глубокое обучение, нейронные сети, UNet, микроэлектродное картирование, локальный полевой потенциал, электрограммы миокарда.

1. Введение

Перспективной задачей как для медицинских целей, так и для фундаментальных исследований является применение искусственного интеллекта для автоматизации анализа частотных и пространственно-временных параметров биоэлектрической активности сердца. Уже сейчас предпринимаются попытки использования ИИ для анализа электроанатомических карт, получаемых в ходе проведения электрофизиологического исследования сердца при катетерной абляции [1].

В фундаментальных исследованиях одним из наиболее эффективных на сегодняшний день методов изучения биоэлектрических свойств миокарда является метод использования микроэлектродных матриц, который отличается высоким пространственным разрешением регистрации внеклеточных потенциалов. Полученные при помощи матриц данные анализируются путем определения моментов активации, соответствующих точкам максимальной крутизны спада потенциалов на графике электрограммы.

Анализ частоты возникновения моментов активации на одном электроде или последовательности возникновения на нескольких электродах в пределах матрицы, даст возможность оценить такие параметры сердца, как его пейсмейкерная активность и электрическая проводимость миокарда.

Использование методов машинного обучения направлено на автоматизацию процесс распознавания моментов активации, локализации шумовых участков электрограммы и участков, представляющих наибольший интерес для исследователя. Сложности при анализе биоэлектрических потенциалов, регистрируемых с живых объектов исследования (клетка, ткань, орган) прямыми методами, заключаются в нестабильности формы, амплитуды и частоты регистрируемых биоэлектрических потенциалов в зависимости от условий эксперимента, а также в присутствии электрических шумов и артефактов. Существует необходимость постоянного контроля параметров алгоритма обработки сигнала на множественных коротких временных интервалах с последующей тщательной верификацией результата. Принимая во внимание высокие значения частоты дискретизации записи современной измерительной техники и внушительные объемы выходных данных, становится очевидной необходимость использования алгоритмов искусственного интеллекта для решения данных аналитических задач.

[1*] Сбор и предобработка данных выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ, проект № 0729-2021-013. Обучение нейронной сети выполнено в рамках реализации программы стратегического академического лидерства Приоритет 2030.

2. Обзор существующих решений

В работах, проведенных с применением микроэлектродных матриц немецкой компании «Multichannel system», для регистрации, визуализации и предобработки биоэлектрических потенциалов используются программные комплексы, предложенные непосредственно фирмой-производителем, в частности программный комплекс Cardio2D [2, 3, 4].

Можно заметить, что при зашумлённых сигналах, процент корректно сегментированных моментов активации очень низок и стремится к нулю. Сложность при работе с такой программой заключается и в ручной настройке параметров для методов сегментации, что крайне неинтуитивно и ведёт к возникновению ошибок разметки.

Стоит отметить, что применение нейронных сетей архитектуры UNet для задачи сегментации сигнала не нова. Отличные результаты сегментации одномерного сигнала электрокардиограммы продемонстрированы в работе Виктора Москаленко «Deep learning for ECG segmentation» [5]. В частности, точность в локализации срабатывания предсердий достигнута на уровне 0.96 метрики F1, а локализация QRS- и T- комплексов достигает точности 0.99.

3. Постановка задачи

Таким образом, существующие решения для обработки и анализа сигнала электрограммы имеют ряд существенных недостатков: низкая точность локализации моментов активации, сложная и неинтуитивная настройка сегментации, отсутствие качественных алгоритмов подавления шума и гибкости в проведении анализа. Для решения этих проблем, предлагается разработка программного комплекса, на базе методов искусственного интеллекта, ориентированных на решение задачи сегментации и локализации моментов активации на электрограммах активности сердца для проведения анализа экспериментальных результатов.

В рамках работы представлены результаты разработки сегментирующей нейронной сети, основанной на архитектуре UNet.

3.1. Метрики качества

Матрица ошибок (Confusion matrix) для бинарной классификации состоит из четырех элементов: true positive (истинно-положительное), false negative (ложно-отрицательное), false positive (ложно-положительное) и true negative (истинно-отрицательное). Эти элементы представляют количество верно и неверно классифицированных примеров каждого класса.

Таблица 1. Структура матрицы ошибок

		Предсказанный класс	
		Negative	Positive
Истинный класс	Negative	TN	FP
	Positive	FN	TP

- **True Positive (TP):** Количество примеров, правильно классифицированных как положительные.
- **False Negative (FN):** Количество примеров, неправильно классифицированных как отрицательные.
- **False Positive (FP):** Количество примеров, неправильно классифицированных как положительные.
- **True Negative (TN):** Количество примеров, правильно классифицированных как отрицательные.

Матрица ошибок позволяет оценить производительность классификатора и вычислить различные метрики, такие как точность (precision), полнота (recall).

$$precision = \frac{TP}{TP + FP}$$

$$recall = \frac{TP}{TP + FN}$$

Оценка качества бинарной классификации будет происходить с использованием F1-меры (F1 score) является мерой, объединяющей точность (precision) и полноту (recall) модели. F1-мера вычисляется по следующей формуле:

$$F1 = 2\frac{precision * recall}{precision + recall}$$

F1-мера является хорошим показателем, когда важны и точность, и полнота. Высокое значение F1-меры указывает на хорошую сбалансированность между точностью и полнотой классификационной модели.

3.2. Входные данные

В качестве данных для обучения нейронной сети были использованы 8 электрограмм продолжительностью 10 минут, содержащие 64 канала. Часть каналов были исключены из тренировочной выборки, в силу сильной зашумлённости сигнала или его отсутствия. Наличие таких сигналов определяется экспериментом и исключается специалистом. Частота дискретизации сигнала равна 5 кГц. Для каждого сигнала представлена локализация момента активации, в виде массива данных. Временные метки были установлены специалистом.

3.3. Предобработка данных

Этап предобработки данных делится на два: коррекция разметки и подготовка обучающих данных. При коррекции разметки сопоставлялась разметка, сформированная экспертом и моменты активации на реальном сигнале. Было проведено сведение набора индексов, соответствующих пикам в сигнале с единичными активациями. На полученных таким образом данных наблюдался сильный дисбаланс классов. Чтобы избежать этого, единичные активации были заменены функциями унимодального типа (рис. 1).

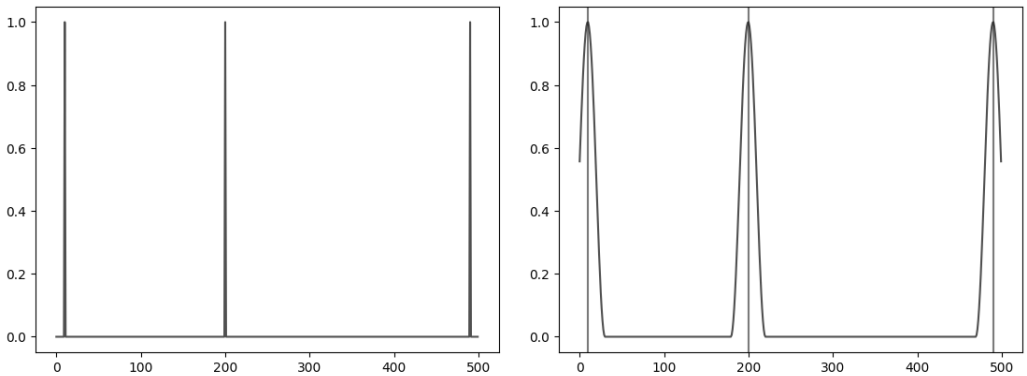


Рис. 1. Исходная разметка сигнала (слева) и скорректированная разметка (справа)

В ходе коррекции исходной разметки были выявлены ошибки локализации: часть разметки, сгенерированная автоматически упрощёнными методами, была упущена экспертом и не была удалена из тренировочной выборки. Для устранения артефактов, анализировались все валидные каналы из предоставленных, параллельно. Моменты активации располагаются во всех отведениях (каналах) сигнала примерно в одном месте, с возможной погрешностью в несколько сотен микросекунд. Отмеченный момент активации считается ложным в том случае, если он отсутствует в более половине всех активных каналов. В таком случае, метка удаляется из выборки с последующей коррекцией сегментации.

Протокол формирования тренировочной выборки представлен следующими этапами:

1. Из предоставленных файлов выбирался один, для формирования тестовой выборки;
2. Оставшиеся файлы разбивались на обучающую выборку по следующему принципу:
    - случайно выбирался файл;
    - в данном файле случайным образом выбирался канал;
    - на сигнале с данного канала случайным образом выбиралась точка;
    - случайным образом выбиралось смещение относительно выбранной точки;

- в конечном счёте, относительно данного смещения вырезался фрагмент сигнала, длительностью 2 секунды (10 000 сэмплов сигнала), с соответствующей данному сигналу сегментацией.

Согласно данному протоколу, была сформирована обучающая выборка, содержащая 100 000 размеченных примеров.

3.4. Описание архитектуры сети

В качестве целевой архитектуры сегментирующей нейронной сети выбрана модификация сети UNet: UNet 1D, адаптированная для обработки одномерных сигналов. Архитектура состоит из двух частей: энкодер и декодер. На вход поступает участок сигнала, после чего производим процедуру downsampling, выделяя на каждом уровне карту признаков. После чего производится upsampling с конкатенацией карт признаков, полученных на первом этапе.

Обученная модель сохраняется в формате ONNX для дальнейшего использования в инфраструктуре программного комплекса.

При работе модели на конечном устройстве будет осуществляться следующий сценарий работы.

1. На вход модели поступает запись электрограммы, у которой обрабатываются все активные каналы. Решение об отклонении канала принимается из расчёта стандартного отклонение и превышении некоторого порогового значения, установленного экспериментально.
2. При обработке одного канала, данные в модель поступают партиями по 2 секунды. Проводится операция масштабирования амплитуды сигнала так, чтобы его максимальное и минимальное попадали в диапазон [-1, 1]. Результатом обработки сигнала, выступает некоторая локализованная область момента активации.
3. Для уточнения времени момента активации, по дискретным значениям сигнала в локализованной области, строится сплайн, для повышения дискретизации. Это позволит точнее определить положение точки с минимальной первой производной.
4. После полной обработки записи, запускается проверка на некорректность сегментации сигнала, путём поиска одиночных артефактов: из полученной разметки удаляются сегменты, которые по конкретной временной метке не имеют парных на большей части других каналов.

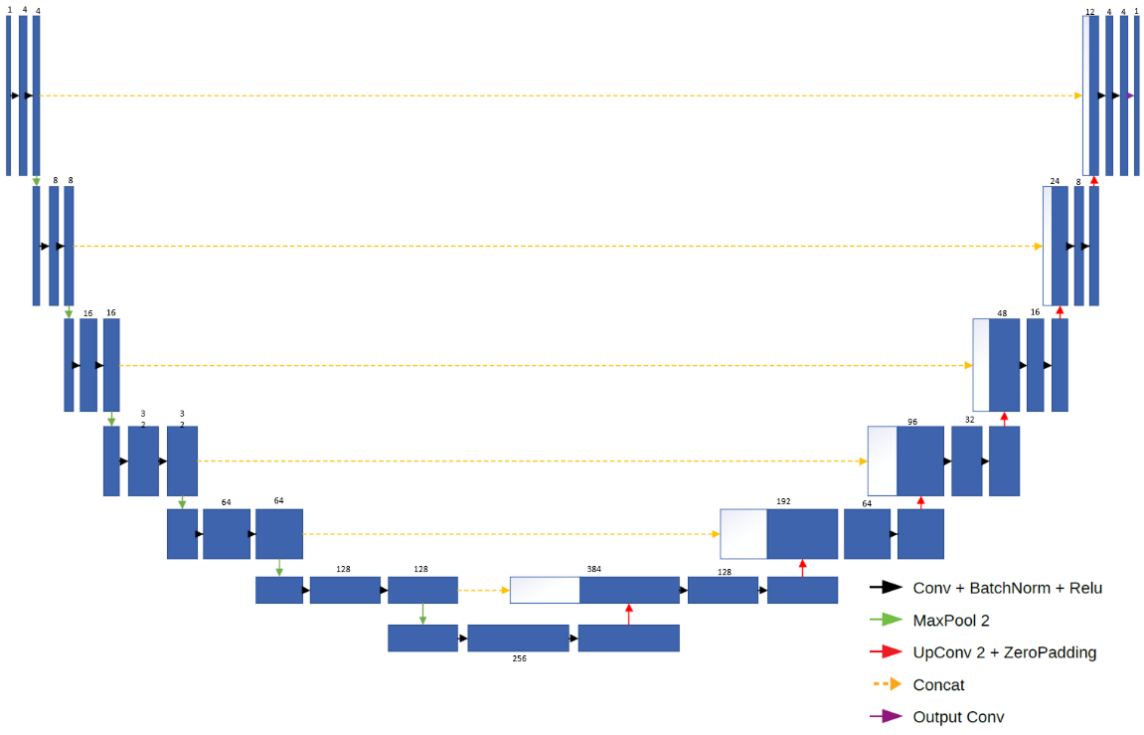


Рис. 2. Архитектура сети UNet 1D, применяемая для сегментации электрограмм

Графически архитектура решения представлена на рисунке 2. При обучении использовался оптимизатор Adam[6], а в качестве функции потерь была выбрана BCE_DICE[7]. В таблице 2 отображены значения kernel_size и padding для всех слоёв свёрточной сети. Для такой архитектуры количество параметров сети равно 6 606 625.

Таблица 2. Структура матрицы ошибок

Энкодер		**Декодер**	
kernel_size	**padding**	**kernel_size**	**padding**
9	4	8	3
17	8	14	6
17	8	14	6
29	14	22	10
29	14	22	10
29	14	30	14
41	20	-	-

4. Результаты

Результат кросс-валидации приведены в таблице 3. Метрики измерялись после всех этапов локализации моментов активации в сигнале электрограммы, включая избавление от артефактов сегментации и уточнения точки минимального значения производной.

Как можно видеть из таблицы, были получены высокие значения метрики F1 на файлах 22ph0, 23ph0, 25ph0, 26ph0. Это связано с тем, что сигнал в данных файлах содержит минимальное количество шумов и артефактов. Файлы 22ph1, 23ph1, 25ph1, 26ph1 были записаны в условиях эксперимента с введением стимулирующего вещества в исследуемый объект. Для таких сигналов, сторонняя система диагностики предоставила разметку с большим числом ошибок, которые сложно исправить эксперту вручную.

Для реализации дальнейших итераций реализации программного обеспечения разработана программа коррекции автоматической разметки для эксперта. Это позволит подготовить качественную разметку для обучающей выборки, тем самым повысив предиктивную способность модели.

Таблица 3. Метрики по каждой записи

Идентификатор файла	**Recall**	**Precision**	**F1 score**
22ph0	0.95	0.97	0.96
22ph1	0.95	0.59	0.73
23ph0	0.92	0.92	0.92
23ph1	0.57	0.80	0.67
25ph0	0.85	0.87	0.86
25ph1	0.31	0.87	0.46
26ph0	0.98	0.81	0.88
26ph1	0.89	0.53	0.67

5. Выводы

В ходе реализации программного обеспечения для сегментации и обработки электрограмм, реализована сегментирующая нейронная сеть для локализации моментов активации в сердце крысы. Была достигнута средняя метрика F1 равная 0.77. Были проанализированы базовые ошибки, которые в основном сосредоточены в подготовке разметки. Для их исправления разработан программный модуль, для исправления ошибок сегментации.

Таким образом, в ходе проведения представленной работы были продемонстрированы хорошие перспективы разработки программного обеспечения для эффективной и результативной обработки электрограмм.

Литература

1. Baldazzi, G., Orrù, M., Viola, G., Pani, D. Computer-aided detection of arrhythmogenic sites in post-ischemic ventricular tachycardia. Scientific Reports. 2023. 13(1). P. 6906-6917. DOI: 10.1038/s41598-023-33866-w.
2. Louisse, J. Assessment of acute and chronic toxicity of doxorubicin in human induced pluripotent stem cell-derived cardiomyocytes // Toxicology In Vitro 42. 2017. P. 182-190. DOI: 10.1016/j.tiv.2017.04.023.
3. Kujala, Ville J. Laminar ventricular myocardium on a microelectrode array-based chip // Journal of Materials Chemistry. 2016. P. 3534-3543. DOI: 10.1039/D0BM01373K.
4. Kharkovskaya E., Osipov G., and Mukhina I.V. Ventricular fibrillation induced by 2-aminoethoxydiphenyl borate under conditions of hypoxia/reoxygenation // Minerva Cardioangiologica 68.6. 2020. P. 619-628. DOI: 10.23736/S0026-4725.20.05376-1.
5. Moskalenko V., Zolotykh N. and Osipov G. Deep learning for ECG segmentation // Advances in Neural Computation, Machine Learning, and Cognitive Research III: Selected Papers from the XXI International Conference on Neuroinformatics, Springer International Publishing. 2020. P. 246-254. DOI: 10.1007/978-3-030-30425-6_29.
6. Zhang, Z. Improved adam optimizer for deep neural networks. 26th international symposium on quality of service. IEEE, 2018. P. 1-2. DOI: 10.1109/IWQoS.2018.8624183.
7. Zhou, L., Zhang, C., & Wu, M. D-LinkNet: LinkNet with pretrained encoder and dilated convolution for high resolution satellite imagery road extraction. In Proceedings of the IEEE conference on computer vision and pattern recognition workshops. IEEE, 2018. P. 182-186.

ПРОБЛЕМА ФРОБЕНИУСА ДЛЯ ТРЕХ НАТУРАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ, ДВА ИЗ КОТОРЫХ СОСЕДНИЕ

В.П. Савельев

Нижегородский инженерно-экономический университет

В настоящей работе решается задача нахождения числа Фробениуса для трех натуральных чисел вида a,a+1,a+m. Если ввести натуральное число k=⌈a/m⌉, где ⌈x⌉ означает наименьшее целое число, не меньшее, чем x, то любое натуральное число a можно представить в виде a=km-j, где j∈{0,1,…,m-1}. Автором ранее получены формулы для числа Фробениуса в двух частных случаях, когда выполнены соотношения a=km и a=km-1. Ниже получена формула для числа Фробениуса в остальных случаях, то есть, когда a=km-j.

Ключевые слова: число Фробениуса.

1. Введение

Проблеме нахождения числа Фробениуса для конечного множества натуральных чисел в последнее время посвящено много работ [1]. Эта проблема напрямую связана с решением ряда известных задач дискретной математики, таких, как задача о рюкзаке, задача о размене монет [2=4], некоторые задачи теории графов [5]. Формула для вычисления числа Фробениуса в общем случае известна лишь для двух натуральных чисел: если наибольший общий делитель натуральных чисел a и b равен единице, то

$$frob(a,b) = ab - a - b. \quad (1)$$

В общем случае, такой формулы нет даже для трех натуральных чисел. Однако, в некоторых случаях формулы найдены, или предложены алгоритмы вычисления числа Фробениуса [6-8]. В частности, в работе [9] получена формула для трех натуральных чисел, которую можно рассматривать как естественное продолжение формулы (1):

$$frob(a,b,frob(a,b)) = frob(a,b) - a, (a < b). \quad (2)$$

В настоящей работе решается задача нахождения числа Фробениуса для трех натуральных чисел вида $a, a+1, a+m$, где $a \in N+2, m \in N+2$.

Заметим, что

– если выполняется неравенство $a + m > frob(a, a+1)$, то есть, $m > a^2 - 2a - 1$, то $frob(a, a+1, a+m) = frob(a, a+1) = a^2 - a - 1$,

– если $a + m = frob(a, a+1)$, то в соответствии с формулой (2)

$$frob(a, a+1, a+m) = a^2 - 2a - b.$$

Таким образом, в дальнейшем будем считать, что $m \in \{2,3, \dots, a^2 - 2a - 2\}$.

2. Вывод формулы

Для исходного множества натуральных чисел $a, a+1, a+m$ определим аддитивную полугруппу $G(a, a+1, a+m)$, порожденную этими числами. Отметим, что каждый элемент $g \in G(a, a+1, a+m)$ можно представить в виде линейной целочисленной неотрицательной комбинации

$$g = x_1 a + x_2(a+1) + x_3(a+m), x_i \in Z_+, i = \overrightarrow{1,n}.$$

Множество $N \backslash G(a, a+1, a+m) = \overline{G(a, a+1, a+m)}$ называется множеством Фробениуса. Числом Фробениуса $frob(a, a+1, \dots, a+m)$ называется наибольшее натуральное число, принадлежащее множеству Фробениуса $\overline{G(a, a+1, a+m)}$.

В работе [10, стр.77-81] получены две формулы числа Фробениуса для трех натуральных чисел вида $a, a+1, a+m$:

Утверждение 1. Пусть $m \in N+2$, $a = km, k \in N$, тогда

$$frob(a, a+1, a+m) = (k+m-2)a - 1. \quad (3)$$

Утверждение 2. Пусть $m \in N+2$, $a = km-1, k \in N$, тогда

$$frob(a, a+1, a+m) = (k+m-3)a - 1. \quad (4)$$

Для доказательства, что некоторое число является числом Фробениуса, весьма полезным является следующее очевидное утверждение.

Утверждение 3. Пусть $a_i \in N, i = \overrightarrow{1,n}$, и $a = min\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$. Если a натуральных чисел $b+1, b+2, \dots, b+a$ принадлежат аддитивной полугруппе $G(a_1, a_2, \dots, a_n)$, то ей принадлежат все натуральные числа, начиная с числа $b+1$.

Утверждение 4. Пусть $a \in N+2, m \in N+2, k = \left\lfloor \frac{a}{m} \right\rfloor, a = km - j, j \in \{2, \dots, m-1\}, j \leq k+1$. Тогда

$$frob(a, a+1, a+m) = (k+m-3)a - m + j - 1. \quad (5)$$

Во-первых, покажем, что линейная комбинация

$$L = x_1 a + x_2(a+1) + x_3(a+m) \quad (6)$$

не может принимать значения $(k+m-3)a - m + j - 1$, ни при каких $x_i \in Z_+, i = \overrightarrow{1,3}$.

Действительно, если предположить, что $x_1 + x_2 + x_3 \geq k+m-3$, то значение линейной комбинации (6) будет строго больше, чем число $(k+m-3)a - m + j - 1$:

$$L \geq (k+m-3)a + x_2 + mx_3 > (k+m-3)a - m + j - 1.$$

Теперь предположим, что при условии

$$x_1 + x_2 + x_3 = k + m - l, l \in \{4, \dots, k+m\}, \quad (7)$$

значение линейной комбинации (6) равно числу $(k+m-3)a - m + j - 1$:

$$L = (k+m-l)a + x_2 + mx_3 = (k+m-3)a - m + j - 1. \quad (8)$$

После переноса выражения $(k+m-l)a$ в правую часть равенства (8), с учетом того, что $a = km - j$, мы получим соотношение

$$x_2 - j + 1 + (l-3)j + mx_3 = (l-3)km - m, \quad (9)$$

из которого следует, что натуральное число $x_2 - j + 1 + (l-3)j$ должно быть кратным числу m. Обозначив

$$x_2 - j + 1 + (l-3)j = im, \quad (10)$$

заметим, что для неотрицательности коэффициента x_2 необходимо, чтобы $i \in N$, и выполнялось условие

$$im - 1 \geq (l-4)j. \quad (11)$$

С учетом соотношения (10), из соотношения (9) получим выражение для x_3:

$$x_3 = (l-3)k - 1 - i. \quad (12)$$

С учетом этих значений для x_2 и x_3, соотношение (7) примет вид:

$$x_1 + im - 1 - (l-4)j + (l-3)k - 1 - i = k + m - l. \quad (13)$$

Выразив из соотношения (13) значение x_1, получим противоречие с предположением о том, что $x_1 \in Z_+$:

$x_1 = m(1-i) + i + 2 + (l-4)j - (l-3)k + k - l = (m-1)(1-i) + 3 + (l-4)j - (l-4)k - l = (m-1)(1-i) - (l-4)(k-j) + 3 - l < 0$.

Во-вторых, покажем, что линейная комбинация (6) может принимать все натуральные значения, начиная с $(k+m-3)a - m + j$ и заканчивая числом

$$(k+m-3)a - m + j + a - 1 = (k+m-3)a + (k-1)m - 1.$$

Действительно, если задать значения

$$x_1 = m - 3 - l \geq 0, x_2 = l \geq 0, x_3 = k - 1 \geq 0, \quad (14)$$

то линейная форма (6) будет иметь вид

$$L = (k+m-3)a - m + j + l. \quad (15)$$

При изменении $l = \overrightarrow{0, m-3}$ линейная форма (6) примет все натуральные значения от $(k+m-3)a - m + j$ до значения $(k+m-3)a + j - 3$ включительно, то есть, как минимум до значения $(k+m-3)a - 1$ при $j = 2$.

Далее зададим значения

$$x_1 = k + m - 3 - l - p \geq 0, x_2 = l \geq 0, x_3 = p \geq 0. \quad (16)$$

Тогда линейная форма (6) примет вид

$$L = (k+m-3)a + pm + l \quad (17)$$

и при изменении $l = \overrightarrow{0, m-1}, p = \overrightarrow{0, k-2}$ примет все натуральные значения, начиная с числа $(k+m-3)a$ и заканчивая числом $(k+m-3)a + (k-1)m - 1$.

Литература

1. Alfonsin J.R. The Diophantine Frobenius Problem. Oxford University Press, 2005. 243 p.
2. Шевченко В.Н. Задача о размене, задача Фробениуса и задача групповой минимизации // Комбинаторно-алгебраические методы в прикладной математике. – Горький: Издательство Горьковского университета, 1982. – С 166–179.
3. Selmer E.S., Two popular problems in number theory, I. Changing coins, Normat 29(3) (1981),pp. 81–87.
4. Tripathi A., The coin exchange problem for arithmetic progressions, Am. Math. Monthly 101 (1994), pp. 779–781.
5. Фомичев В.М. Оценка экспонента некоторых графов с помощью чисел Фробениуса для трех аргументов // Прикладная дискретная математика. 2014. №2(24). С. 88–96.

СВОЙСТВА ДЛИН ПЕРИОДОВ ПО МОДУЛЮ D ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ ЧИСЛИТЕЛЕЙ И ЗНАМЕНАТЕЛЕЙ ПОДХОДЯЩИХ ДРОБЕЙ ДЛЯ $\sqrt{D}$

С.В. Сидоров, П.А. Щербаков

Нижегородский госуниверситет им. Н.И. Лобачевского

В докладе представлены свойства периодов последовательностей числителей и знаменателей подходящих дробей цепной дроби для $\sqrt{D}$, где D не является полным квадратом. Доказано, что 1) длина периода последовательности числителей по модулю D равна L=l, 2l или 4l, где l – длина периода цепной дроби для $\sqrt{D}$; 2) длина периода последовательности $\{B_i\}_{i=-1}^{\infty}$ знаменателей по модулю D равна $L_B = \frac{D}{\text{НОД}(D,B_{L-1})} \cdot L$. Кроме того, в предположении справедливости гипотез Морделла и Анкени-Артина-Чоулы показано, что $L_B = pL$ для простого p.

Ключевые слова: цепная дробь, подходящая дробь, период, простое число, гипотеза Морделла, гипотеза Анкени-Артина-Чоулы.

1. Введение

Цепные дроби представляют собой один из классических объектов, изучаемых в теории чисел (см. [2, 4, 5, 6, 8, 9]). Известно, что любое действительное число x можно представить в виде простой цепной дроби

$$x = q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{q_2 + \cdots}},$$

где $q_0, q_1, q_2, \cdots$ – натуральные числа (за исключением, быть может, q_0, которое будет отрицательным, если $x < 0$), называемые неполными частными. Часто цепную дробь записывают следующим образом: $[q_0, q_1, q_2, \cdots]$. Оборвав цепную дробь на i-м неполном частном, получим выражение $q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{\cdots + \frac{1}{q_i}}}$, которое после преобразований можно записать как рациональное число $\frac{A_i}{B_i}$, называемое i-й подходящей дробью для числа x. Числители и знаменатели подходящих дробей можно вычислять по следующим рекуррентным формулам:

$$\begin{cases} A_{-1} = 1, \\ A_0 = q_0, \\ A_{i+1} = q_{i+1}A_i + A_{i-1}, \ \ i \geq 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} B_{-1} = 0, \\ B_0 = 1, \\ B_{i+1} = q_{i+1}B_i + B_{i-1}, \ \ i \geq 0. \end{cases}$$

Лагранжем было доказано, что если $D \in \mathbb{N}$ не является полным квадратом, то цепная дробь для $\sqrt{D}$ является периодической и имеет вид

$$\sqrt{D} = [q_0, \overline{q_1, q_2, \cdots, q_{l-1}, q_l}],$$

где l – длина периода, а черта сверху означает периодическую часть. Более того, блок $q_1, q_2, \cdots, q_{l-1}$ является палиндромом, т.е. $q_i = q_{l-i}$ для $l = 1,2, \cdots, l-1$, а $q_l = 2q_0$.

Целью нашей работы является продолжение исследований периодов последовательностей $\{A_i \bmod D\}_{i=-1}^{\infty}$, $\{B_i \bmod D\}_{i=-1}^{\infty}$ числителей и знаменателей по модулю D подходящих дробей для $\sqrt{D}$, начатое в работе [11]. А именно, в [11] была доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть p – простое число, l – длина периода цепной дроби для $\sqrt{p}$, а L – длина периода последовательности $\{A_i \bmod p\}_{i=-1}^{\infty}$ числителей по модулю p соответствующих подходящих дробей. Тогда*

1. *Если $p = 2$, то $L = l = 1$.*
2. *Если $p \equiv 7 (mod\ 8)$, то $L = l$, $l = 4t$ для некоторого $t \in \mathbb{N}$, а периодическая часть имеет вид*

$$\underbrace{1, A_0, A_1, \cdots, A_{2t-3}, A_{2t-2}, A_{2t-1}, -A_{2t-2}, A_{2t-3}, \cdots, A_1, -A_0}_{l=4t}.$$

3. *Если* $p \equiv 3(mod\ 8)$, *то* $L = 2l$, $l = 4t + 2$ *для некоторого* $t \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, *а периодическая часть имеет вид*

$$\underbrace{1, A_0, A_1, \cdots, A_{2t-1}, A_{2t}, -A_{2t-1}, \cdots, -A_1, A_0}_{l=4t+2}, \underbrace{-1, -A_0, -A_1, \cdots, -A_{2t-1}, -A_{2t}, A_{2t-1}, \cdots, A_1, -A_0}_{l=4t+2}$$

(*второй блок длины* l *получается из первого, умножением на* -1).

4. *Если* $p \equiv 1(mod\ 4)$, *то* $L = 4l$, $l = 2t + 1$ *для некоторого* $t \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, *а периодическая часть имеет вид*

$$\underbrace{1, A_0, A_1, \cdots, A_{t-2}, A_{t-1}, (-1)^t rA_{t-1}, (-1)^{t-1} rA_{t-2}, \cdots, rA_1, -rA_0}_{l=2t+1},$$

$$\underbrace{r, rA_0, rA_1, \cdots, rA_{t-2}, rA_{t-1}, (-1)^{t-1} A_{t-1}, (-1)^{t-2} A_{t-2}, \cdots, -A_1, A_0}_{l=2t+1},$$

$$\underbrace{-1, -A_0, -A_1, \cdots, -A_{t-2}, -A_{t-1}, (-1)^{t-1} rA_{t-1}, (-1)^{t-2} rA_{t-2}, \cdots, -rA_1, rA_0}_{l=2t+1},$$

$$\underbrace{-r, -rA_0, -rA_1, \cdots, -rA_{t-2}, -rA_{t-1}, (-1)^t A_{t-1}, (-1)^{t-1} A_{t-2}, \cdots, A_1, -A_0}_{l=2t+1},$$

(*каждый блок длины* l *получается из предыдущего блока умножением на* r), *где* r *удовлетворяет сравнению* $r^2 \equiv -1\ (mod\ p)$.

2. Основные результаты

Главными результатами, представленными в докладе, являются следующие теоремы.

Теорема 2. *Пусть D не является полным квадратом,* l *– длина периода цепной дроби для* $\sqrt{D}$, *а* L *– длина периода последовательности* $\{A_i \bmod D\}_{i=-1}^{\infty}$. *Тогда эта последовательность чисто периодическая, причём*

1. *Если* l *– чётно и* $A_{l-1} \equiv 1\ (mod\ D)$, *то* $A_{l+j} \equiv A_j (mod\ D)$, $j \geq -1$, *и* $L = l$ *– чётно.*
2. *Если* l *– чётно и* $A_{l-1} \not\equiv 1\ (mod\ D)$, *то* $A_{2l+j} \equiv A_j (mod\ D)$, $j \geq -1$, *и* $L = 2l$ *– чётно.*
3. *Если* l *– нечётно, то* $A_{4l+j} \equiv A_j (mod\ D)$, $j \geq -1$, *и* $L = 4l$ *– чётно*.

Заметим, что Теорема 1 является конкретизацией Теоремы 2 для случая, когда D – простое.

Теорема 3. *Пусть D не является полным квадратом,* L *и* L_B *– длины периодов последовательностей* $\{A_i \bmod D\}_{i=-1}^{\infty}$ *и* $\{B_i \bmod D\}_{i=-1}^{\infty} = \{0,1, B_1, \cdots\}$ *соответственно. Тогда*

$$L_B = \frac{D}{\text{НОД}(D, B_{L-1})} \cdot L.$$

Видим, что величина L_B зависит, в частности, от значения $\text{НОД}(D, B_{L-1})$.

Предложение 1. *Пусть* p *– простое число, l – длина периода цепной дроби для* $\sqrt{p}$, *а L – длина периода последовательности* $\{A_i \bmod p\}_{i=-1}^{\infty}$ *числителей по модулю* p *соответствующих подходящих дробей. Тогда*

$$B_{L-1} = \begin{cases} B_{l-1}, \text{если } p = 2 \text{ или } p \equiv 7(mod\ 8,) \\ B_{2l-1} \equiv -2B_{l-1}(mod\ p), \text{если } p \equiv 3(mod\ 8), \\ B_{4l-1} \equiv -4A_{l-1}B_{l-1}(mod\ p), \text{если } p \equiv 1(mod\ 4). \end{cases}$$

Следствие 1. *Если* p *– простое число и* $B_{l-1} \not\equiv 0\ (mod\ p)$, *то* $B_{L-1} \not\equiv 0\ (mod\ p)$.

Если рассмотреть Теорему 3 для случая, когда $D = p$ является простым, то согласно Следствию 1 значение величины периода L_B последовательности знаменателей зависит от того, делится ли B_{l-1} на p или не делится. Хорошо известно (см., например, [2, 5, 6, 8]), что (A_{l-1}, B_{l-1}) – фундаментальное решение уравнения Пелля $x^2 - py^2 = \pm 1$. Если l нечётно, то $A_{l-1}^2 - pB_{l-1}^2 = -1$. Если l чётно, то $A_{l-1}^2 - pB_{l-1}^2 = 1$. Заметим, что если l нечётно, т.е. p имеет вид $p \equiv 1(mod\ 4)$, то условие $B_{l-1} \not\equiv 0\ (mod\ p)$ известно как гипотеза Анкени–Артина–Чоулы (см. [1]). Если l чётно, т.е. p имеет вид $p \equiv 3(mod\ 4)$, то условие $B_{l-1} \not\equiv 0\ (mod\ p)$ известно как гипотеза Морделла (см. [3]). Эти гипотезы влекут много интересных алгебраических результатов. Одним из таких результатов является описание канонических представителей классов подобия над кольцом $\mathbb{Z}$ матриц 2-го порядка с нулевым следом и определителем, равным нечётной степени простого числа (см. [10]).

Теорема 4. *В предположении справедливости гипотез Морделла и Анкени-Артина-Чоулы длина L_B кратчайшего периода последовательности $\{B_i \bmod p\}_{i=-1}^{\infty} = \{0,1,B_1,\cdots\}$ знаменателей подходящих дробей для $\sqrt{p}$, где p – простое число, равна*

$$L_B = pL = \begin{cases} 2, & \text{если } p = 2, \\ pl, & \text{если } p \equiv 7 (mod\ 8), \\ 2pl, & \text{если } p \equiv 3 (mod\ 8), \\ 4pl, & \text{если } p \equiv 1 (mod\ 4). \end{cases}$$

Из Теоремы 4 следует, что если для числа D периоды L_B и L таковы, что $\frac{L_B}{L} \neq D$, то D не может быть простым (конечно, в предположении гипотез Морделла и Анкени-Артина-Чоулы). Ниже приведены таблицы для первых 26 составных чисел D, не являющихся полными квадратами, вместе с отношениями $\frac{L}{l}, \frac{L_B}{l}, \frac{L_B}{L}$.

Таблица 1.

D	6	8	10	12	14	15	18	20	21	22	24	26	27
L/l	2	2	4	2	1	2	2	2	2	2	2	4	2
L_B/l	6	8	20	6	7	30	18	10	14	22	24	52	54
L_B/L	3	4	5	3	7	15	9	5	7	11	12	13	27

Таблица 2.

D	28	30	32	33	34	35	38	39	40	42	44	45	46
L/l	2	2	2	2	1	2	2	2	2	2	2	2	1
L_B/l	14	30	32	66	17	70	38	78	40	42	22	30	1
L_B/L	7	15	16	33	17	35	19	39	20	21	11	15	1

Числа D, для которых $L_B = L$, например, $D = 46$ в таблице выше, являются особенными в том смысле, что для них не выполняются гипотезы Морделла и Анкени-Артина-Чоулы (т.е. для таких чисел $B_{l-1} \equiv 0\ (mod\ D)$). Последовательность чисел D, для которых выполнено сравнение $B_{l-1} \equiv 0\ (mod\ D)$, – это 46, 430, 1817, 58254, 209991, 1752299, 3124318, . . . (см. [12]). Они возникают при поиске трёх последовательных так называемых полнократных чисел (powerful numbers). Полнократное число – это произведение квадрата и куба. За деталями можно обратиться к работам [7, 13].

Литература

1. Ankeny, N., Artin, E., Chowla, S. The class-number of real quadratic number fields // Annals of Mathematics. 1952. Vol. 56, No. 3. P. 479–493.
2. Davenport, H. The higher arithmetic: An introduction to the theory of numbers. Cambridge University Press, 1999. 241 p.
3. Mordell, L. On a pellian equation conjecture (II) // Journal of the London Mathematical Society. 1961. Vol. 1, No. 1. P.282–288. DOI:10.1112/jlms/s1-36.1.282.
4. Niven, I., Zuckerman, H.S., Montgomery, H.L. An introduction to the theory of numbers. John Wiley & Sons, 1991. 529 p.
5. Olds, C. Continued Fractions. Random House, 1963. 162 p.
6. Perron, O. Die Lehre von den Kettenbrüchen: Band I: Elementare Kettenbrüche. Springer-Verlag, 2013. 194 p. DOI:10.1007/978-3-663-12289-0.
7. Reinhart, A. On orders in quadratic number fields with unusual sets of distances. URL: https://arxiv.org/abs/2305.09267v3 (дата обращения: 2023).
8. Rockett, A., Szusz, P. Continued fractions. World Scientific, 1992. 200 p.
9. Rosen, K.H.: Elementary number theory and its applications. Pearson Education London, 2011. 752 p.
10. Sidorov, S.V. On similarity classes of second order matrices with zero trace over the ring of integers // Russian Mathematics. 2016. Vol. 60, No 4. P. 65–71. DOI:10.3103/S1066369X16040101.

11. Sidorov, S.V., Shcherbakov, P.A. On the period length modulo p of the numerators of convergents for the square root of a prime number p // International Conference on Mathematical Modeling and Supercomputer Technologies, MMST 2022, Nizhny Novgorod, Russia, November 14–17, 2022. P. 136–147. DOI:10.1007/978-3-031-24145-1_11.
12. Sloane, N. The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences, A135735, 2023, available at http://oeis.org/A135735.
13. Stephens, A.J., Williams, H.C. Some computational results on a problem concerning powerful numbers // Mathematics of Computation. 1988. Vol. 50, No. 182. P. 619–632.

ПАРАЛЛЕЛЬНЫЙ ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ В ПРИБЛИЖЕНИИ МЕЛКОЙ ВОДЫ ДЛЯ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ С ОБЩЕЙ ПАМЯТЬЮ

***А.В. Старченко*[1,2]**

[1]Томский государственный университет,
[2]ФИЦ информационных и вычислительных технологий

Для численного моделирования нестационарных изотермических турбулентных течений в речных потоках сформулирована математическая модель, опирающаяся на приближение «мелкой воды», эффективный численный метод, обеспечивающий в рамках использования метода конечного объема, структурированных разнесенных сеток и полунеявных разностных схем, выполнение на разностном уровне законов сохранения массы и импульса. Вычислительная реализация была протестирована на известном аналитическом решении и распараллелена с помощью технологий OpenMP и OpenACC на многоядерной системе с общей памятью.

Ключевые слова: уравнения мелкой воды, структурированные разнесенные сетки, метод конечного объема, параллельные алгоритмы, OpenMP, OpenACC.

1. Введение

Моделирование таких природных явлений как цунами, наводнения, океанические течения, течения в реках, прорыв дамбы может занимать достаточно долгое время, особенно при проведении расчетов с высоким пространственным разрешением на протяженной области исследования [1].

Целью данной работы является формулировка математической постановки задачи о нестационарных изотермических турбулентных течениях в речных потоках, опирающейся на приближение «мелкой воды», построение эффективного численного метода, разработка параллельных вычислительных алгоритмов для многоядерных вычислительных систем с общей оперативной памятью.

2. Постановка задачи

Рассматривается турбулентное изотермическое движение несжимаемой ньютоновской жидкости в речном потоке. Область исследования представляет собой участок открытого речного русла с островами и нерегулярным рельефом дна. Характеристики течения могут значительно меняться со временем, и потому течение считается нестационарным. Движение воды в реке определяется силами гравитации и трения. Кроме того, учитывается влияние на течение силы Кориолиса и турбулентной диффузии.

Предполагается, что горизонтальные размеры области существенно превосходят вертикальные, осредненные по Рейнольдсу характеристики течения слабо меняются в вертикальном направлении, а вертикальное распределение давления является гидростатическим. Теплофизические свойства воды (вязкость, плотность) считаются постоянными.

2.1. Система уравнений и краевые условия

Математическая модель в приближении мелкой воды [2] включает уравнение неразрывности:

$$\frac{\partial h}{\partial t}+\frac{\partial (hu)}{\partial x}+\frac{\partial (hv)}{\partial y}=0 \qquad (1)$$

уравнения движения:

$$\frac{\partial(hu)}{\partial t}+\frac{\partial(hu^2)}{\partial x}+\frac{\partial(huv)}{\partial y}=-gh\frac{\partial(z_b+h)}{\partial x}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial(h\tau_{xx})}{\partial x}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial(h\tau_{xy})}{\partial y}+\frac{(\tau_{xz})_s-(\tau_{xz})_b}{\rho}-hF_x,$$
$$\frac{\partial(hv)}{\partial t}+\frac{\partial(huv)}{\partial x}+\frac{\partial(hv^2)}{\partial y}=-gh\frac{\partial(z_b+h)}{\partial y}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial(h\tau_{yx})}{\partial x}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial(h\tau_{yy})}{\partial y}+\frac{(\tau_{yz})_s-(\tau_{yz})_b}{\rho}-hF_y. \quad (2)$$

Здесь $h(t,x,y)$ – глубина; $u(t,x,y)$, $v(t,x,y)$ – осредненные по глубине значения компонент вектора скорости; $z_b(x,y)$ – рельеф дна; ρ – плотность воды, g – ускорение свободного падения; τ_{xx}, τ_{xy}, τ_{yx}, τ_{yy}, – осредненные по глубине компоненты тензора вязких напряжений и напряжений Рейнольдса; $(\tau_{xz})_s$, $(\tau_{xz})_b$, $(\tau_{yz})_s$, $(\tau_{yz})_b$ – трение на поверхности воды и на дне, соответственно. Предполагается, что в рассматриваемом случае ветровое трение не оказывает на речное течение значительного влияния и потому не учитывается в модели. Осредненные по глубине компоненты силы Кориолиса определяются следующим образом:

$$F_x=(-4\pi/\tau)\sin(lat)v;\quad F_y=(4\pi/\tau)\sin(lat)u\ .$$

lat – географическая широта, τ – продолжительность суток в секундах.

Для получения неизвестных значений компонент тензора напряжений в уравнениях модели используются соотношения Буссинеска:

$$\frac{\tau_{xy}}{\rho}=\frac{\tau_{yx}}{\rho}=(\nu+\nu_t)\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right),\ \frac{\tau_{xx}}{\rho}=2(\nu+\nu_t)\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{2}{3}k,\ \frac{\tau_{yy}}{\rho}=2(\nu+\nu_t)\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{2}{3}k, \quad (3)$$

где ν – молекулярная кинематическая вязкость воды, ν_t – турбулентная вязкость, k – кинетическая энергия турбулентности.

Трение о дно определяется как:

$$(\tau_{xz})_b=\rho c_f u|\vec{w}|,(\tau_{yz})_b=\rho c_f v|\vec{w}|,$$

где c_f – коэффициент трения, зависящий от физических характеристик русла или канала: $c_f=gn^2/h^{0,33}$ определяется из закона трения Маннинга, где n – коэффициент Маннинга, характеризующий шероховатость русла.

Для учета переноса, генерации, диффузии и диссипации турбулентных вихрей в данной работе для замыкания уравнений мелкой воды применяется k-ε модель турбулентности, построенная Растоги и Роди [3] из оригинальной k-ε модели Лаундера и Сполдинга [4] для замыкания уравнений Рейнольдса.

На входе в расчетную область задаются однородные профили нормальной к границе компоненты скорости потока U_0, энергии турбулентности k_0, диссипации ε_0, и глубины потока h_0, полученные из эмпирических данных. Поперечная компонента скорости потока на входе задается равной нулю. В качестве граничных условий на выходе из области используется равенство нулю производных по внешней нормали к выходной границе для основных характеристик течения. В начальный момент распределения глубины потока, компонент скорости и параметров энергии турбулентности на рассматриваемой области считаются известными.

3. Численный метод

Для построения дискретного аналога разрабатываемой математической модели расчетная область, размером $[0,L_x]$x$[0,L_y]$, в которой исследуется течение потока с переменными границами, покрывается структурированной сеткой с шагами $\Delta x,\Delta y$, соответственно. Согласно концепции метода конечных объемов, каждый внутренний узел сетки оказывается в отдельном конечном объеме (Рис.1). При этом значения глубины потока, рельефа дна (и параметров модели турбулентности) определяются в узлах расчетной сетки, а компоненты вектора скорости – в серединах соответствующих граней конечных объемов. Для рассматриваемого фрагмента сетки используются следующие обозначения. Каждый конечный объем сетки имеет западную (w), восточную (e), северную (n) и южную (s) границы и центр (P). Центры соседних конечных объемов обозначаются W, E, N, S, соответственно.

Дифференциальные уравнения модели интегрируются по каждому конечному объему. Уравнения движения аппроксимируются в ячейках, сдвинутых на $\Delta x/2$ и $\Delta y/2$, соответственно. Для приближенного вычисления интегралов используются квадратурные формулы

средних прямоугольников, производные приближенно вычисляются по центрально-разностным формулам. При аппроксимации уравнений по времени используются условно устойчивые полунеявные разностные схемы, консервативные не только для уравнения неразрывности (1), но и для уравнений движения (2), что весьма важно для получения неотрицательных значений глубины потока h [5].

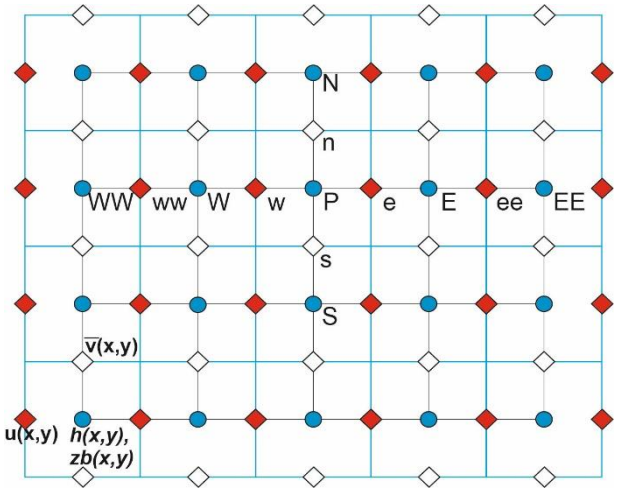


Рис. 1. Расчетная сетка; круглые значки соответствуют центру конечного объема, заполненные ромбы – компоненте скорости u, открытые ромбы – v

В итоге получаются полунеявные разностные схемы первого порядка аппроксимации по времени и второго – по пространственных координатам.

$$\frac{h_P^{k+1}-h_P^k}{\Delta t_k}+\frac{G_e^k-G_w^k}{\Delta x}+\frac{G_n^k-G_s^k}{\Delta y}=0, \tag{4}$$

$$\frac{u_e^{k+1}-u_e^k}{\Delta t_k}+\frac{1}{h_e^k}\left[\frac{q_{x\,E}^k u_E^k-q_{x\,P}^k u_P^k}{\Delta x}-u_e^k\frac{q_{x\,E}^k-q_{x\,P}^k}{\Delta x}\right]+\frac{1}{h_e^k}\left[\frac{q_{y\,ne}^k u_{ne}^k-q_{y\,se}^k u_{se}^k}{\Delta y}-u_e^k\frac{q_{y\,ne}^k-q_{y\,se}^k}{\Delta y}\right]+$$
$$g\frac{\zeta_E^{k+1}-\zeta_P^{k+1}}{\Delta x}+\frac{c_f\left|\vec{w}_e^k\right|u_e^{k+1}}{h_e^k}-\left(D_x\right)_e^k+\left(F_x\right)_e^k=0, \tag{5}$$

$$\frac{v_n^{k+1}-v_n^k}{\Delta t_k}+\frac{1}{h_n^k}\left[\frac{q_{x\,en}^k v_{en}^k-q_{x\,wn}^k v_{wn}^k}{\Delta x}-v_n^k\frac{q_{x\,en}^k-q_{x\,wn}^k}{\Delta x}\right]+\frac{1}{h_n^k}\left[\frac{q_{y\,N}^k v_N^k-q_{y\,P}^k v_P^k}{\Delta y}-v_n^k\frac{q_{y\,N}^k-q_{y\,P}^k}{\Delta y}\right]+$$
$$g\frac{\zeta_N^{k+1}-\zeta_P^{k+1}}{\Delta x}+\frac{c_f\left|\vec{w}_n^k\right|v_n^{k+1}}{h_n^k}-\left(D_y\right)_n^k+\left(F_y\right)_n^k=0, \tag{6}$$

Здесь $\zeta = z_b + h$, для вычисления потоков на гранях конечных объемов $G_e = (uh)_e = (q_x)_e$, $G_n = (vh)_n = (q_y)_n$ используются монотонизированные противопотоковые аппроксимации ван Лира [6] с ограничителем [7]:

$$G_e=\begin{cases}u_e\left(h_P+0.5\Psi\left(\theta^+\right)\left(h_E-h_P\right)\right),u_e>0\\ u_e\left(h_E-0.5\Psi\left(\theta^-\right)\left(h_E-h_P\right)\right),u_e\le 0\end{cases}\quad \Psi(\theta)=\max\left(0,\min\left(\min\left(2\theta,\frac{\theta+2}{3}\right),2\right)\right)\quad \theta_e^+=\frac{h_P-h_W}{h_E-h_P},\quad \theta_e^-=\frac{h_{EE}-h_E}{h_E-h_P}$$

$$h_e=\frac{h_E+h_P}{2},q_{xP}=\frac{q_{xe}+q_{xw}}{2};q_{xe}=h_P\max\left(u_e,0\right)-h_E\max\left(-u_e,0\right),q_{xw}=h_W\max\left(u_w,0\right)-h_P\max\left(-u_w,0\right);$$

$$q_{y\,ne}=\frac{q_{yn}+q_{ys}}{2};q_{yn}=h_P\max\left(v_n,0\right)-h_N\max\left(-v_n,0\right),q_{ys}=h_s\max\left(v_s,0\right)-h_P\max\left(-v_s,0\right),$$

При вычислении произведений $q_{xE}u_E, q_{yne}u_{ne}, q_{x\,en}v_{en}, q_{yN}v_N$ используются аппроксимации ван

Лира [6] с ограничителем [7], рассмотренные выше. Для устойчивого по времени интегрирования уравнений (4)-(6) величина шага по времени выбирается из условия

$$\Delta t_k < \frac{\max\left(\Delta x, \Delta y\right)}{2\left(\left|\vec{w}_P^k\right| + \sqrt{g h_P^k}\right)}. \qquad (7)$$

Такой шаг обеспечивает неотрицательность глубины потока *h*.

4. Параллельная реализация

Построенная выше полунеявная разностная схема на разнесенных разностных сетках имеет большой потенциал для создания эффективной параллельной программы, поскольку на каждом шаге по времени вычисления глубины или компонент скорости по формулам (4)-(6) могут производиться одновременно и независимо в каждом вычислительном узле сетки. Так как в распоряжении имеется сервер с общей памятью объемом 192Гб и двумя двенадцатиядерными процессорами Intel Xeon Silver 4214 2,2 ГГц и одной графической картой GPU NVIDIA Geforce RTX2080 Ti, было проведено исследование эффективности построенных с помощью мало затратных в параллельном программировании технологий OpenMP (Open MultiProcessing) и OpenACC (Open Accelerators) параллельных программ. В качестве задачи, на которой проводилось тестирование точности вычислений и качества распараллеливания, рассматривалась классическая двумерная задача Такера о колебании жидкости без трения в водоеме, дно которого представляет собой параболоид. Аналитическое решение задачи представлено в [8].

В расчетах использовалась сетка 500x500. По времени вычислительный процесс длился три периода колебаний жидкости в параболоиде. Шаг по времени определялся из условия устойчивости разностных схем (7). Расчет по последовательной программе для рассматриваемых условий на сервере составил 547,7 с. На рисунке 2 представлены графики ускорения и эффективности параллельной программы, созданной с помощью OpenMP технологии.

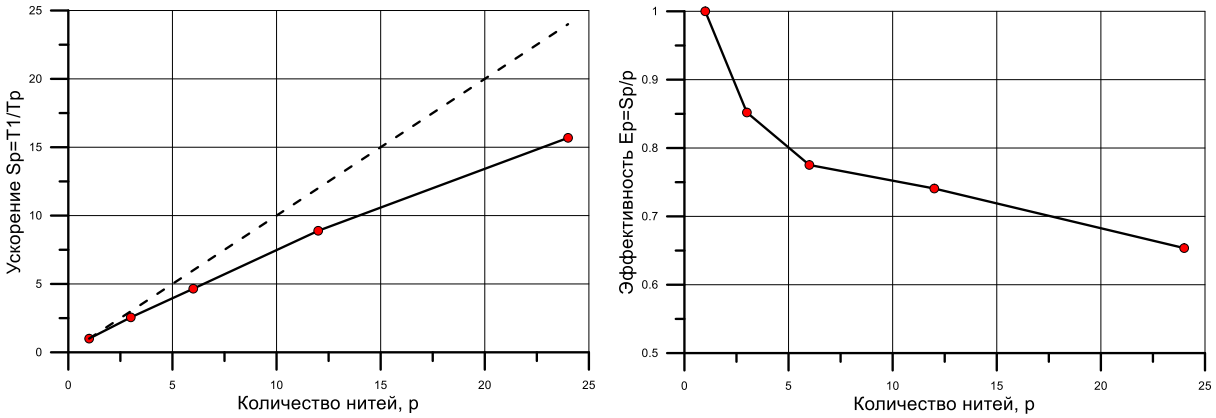


Рис. 2. Ускорение и эффективность параллельной OpenMP-программы;
штриховая линия – график зависимости идеального ускорения $S_p = p$

Из рисунка видно, что использование технологии OpenMP позволяет более чем в 15 раз ускорить вычислительный процесс. Использование технологии OpenACC для программирования на графических картах на этой же вычислительной системе и при тех же условиях проведения расчетов дает ускорение более чем в 25 (21,3 с против 547,7 с). В этих технологиях параллельного программирования в качестве основного подхода в распараллеливании использовалось объявление участков программ с параллельным исполнением, в которых выполнялось «автоматическое» распределение итераций циклов между активными ядрами центральных (OpenMP) или графического (OpenACC) процессоров.

Литература

1. Gusev O.I., Khakimzyanov G.S., Skiba V.S., Chubarov L.B. Shallow water modeling of wave–structure interaction over irregular bottom // Ocean Engineering. 2023. Vol.267. Art.113284.
2. Churuksaeva V., Starchenko A. Mathematical modeling of a river stream based on a shallow water approach // Procedia Computer Science. 2015. Vol. 66. P. 200–209.
3. Rastogi A.K., Rodi W. Predictions of heat and mass transfer on open channels // ASCE Journal of the Hydraulics Division. 1978. Vol. 104(3). P. 397–420.
4. Launder B.E., Spalding D.B. The numerical computation of turbulent flows // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 1974. Vol. 2(3). P.269–289.
5. Stelling G.S., Duimijer S.P.A. A staggered conservative scheme for every Froude number in rapidly varied shallow water flows // Int. Journal for Numerical Methods in Fluids. 2003. Vol. 43. 1329–1354.
6. van Leer B. Towards the ultimate conservative difference scheme. V. A second-order sequel to Godunov's method // Journal of Computational Physics. 1979. Vol. 32(1). P. 101–136.
7. Cada M., Torrilhon M. Compact third-order limiter functions for finite volume methods // Journal of Computational Physics. 2009. Vol. 228. P.4118–4145.
8. Thacker W.C. Some exact solutions to the nonlinear shallow water wave equations // Journal of Fluid Mechanics. 1981. Vol. 107. P. 499–508.

ИССЛЕДОВАНИЕ МИНОРОВ МАТРИЦЫ ИНЦИДЕНТНОСТИ *D*-МЕРНОГО КУБА ПРИ ПОМОЩИ СИНГУЛЯРНОГО МНОГОЧЛЕНА

Е.Б. Титова

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского

Для матрицы T, где T – матрица инцидентности вершины-фасеты d-мерного куба, получена асимптотика среднего значения суммы квадратов миноров рангового порядка и в случае, когда порядок миноров $j = \alpha d,\ 0 < \alpha < d$. Получена асимптотика среднего значения суммы квадратов миноров рангового и меньших порядков базисной системы строк матрицы T.

Ключевые слова: матрица инцидентности, сингулярный многочлен, асимптотика среднего значения минора.

1. Введение

Обозначим $(p \times q)$-матрицу, каждый элемент которой равен 1, через $\mathbf{1}^{p\times q}$, единичную матрицу n-го порядка – через E_n. Пусть A – целочисленная $(m \times n)$-матрица $(m \le n)$, r – ее ранг, A^T – матрица, транспонированная к A, $A \times B -$ кронекерово произведение матриц A и B (определение и свойства см., например, в [1]). Обозначим сумму квадратов миноров j-го порядка через $\sigma_j(A) = \sum det^2 A(I,J)$, где суммирование идёт по всем j-элементным подмножествам $I \subseteq \{1,\dots,m\}$ и $J \subseteq \{1,\dots,n\}$, а $A(I,J)$ – подматрица матрицы A, номера строк которой принадлежат подмножеству $I \subseteq \{1,\dots,m\}$, а номера столбцов – подмножеству $J \subseteq \{1,\dots,n\}$. Тогда характеристический многочлен матрицы AA^T

$$\det(\lambda E_m - AA^T) = \sum_{j=0}^{m}(-1)^j\sigma_j(A)\lambda^{m-j} = \lambda^{m-r}\sum_{j=0}^{r}(-1)^j\sigma_j(A)\lambda^{r-j},$$

где многочлен $\varphi(\lambda, A) = \sum_{j=0}^{r}(-1)^j\sigma_j(A)\lambda^{r-j}$ – сингулярный многочлен матрицы A, а его корни – сингулярные числа.

Пусть выпуклый многогранник P описывается системой $Ax \le b, x \ge 0$, где $b -$ целочисленный вектор. Известно, что i-я координата вершины p многогранника P имеет в знаменателе число, равное по абсолютной величине минору j-го порядка матрицы ограничений A, определяющей многогранник. Оценки величин миноров матрицы A могут, например, служить естественной характеристикой, с помощью которой можно охарактеризовать сложность решения задачи целочисленного линейного программирования на специальном классе (см., напр., [2]).

В данной работе мы устанавливаем асимптотику среднего значения квадратов миноров j-го порядка матрицы инцидентности вершины-фасеты d-мерного куба.

2. Постановка задачи

Рассмотрим матрицу ограничений $d -$индексной аксиальной транспортной задачи при $n = 2$ (обозначения и определение см., например, [3]). Матрица $T = T(d-1, d, 2)$ имеет следующее рекурсивное задание

$$T = T(d-1,d,2) = \left[\frac{\mathbf{1}^{1\times 2} \times T(d-2, d-1, 2)}{E_2 \times \mathbf{1}^{1\times 2(d-1)}}\right].$$

Матрица T имеет ранг $r = d+1$, число столбцов $N = 2^d$, число строк $M = 2d$.

Нетрудно видеть, что в этом случае матрицу T можно интерпретировать как матрицу инцидентности фасеты-вершины $d -$мерного куба C_d, заданного системой неравенств $0 \le x_j \le 1\ (1 \le j \le d)$. 2^d столбцов этой матрицы задают все вершины куба, $2d$ строк - грани макси-

мальной размерности (фасеты), 1 ставим в том и только том случае, когда вершина инцидентна фасете, и 0 в противном случае. Удалим из матрицы T, например, все четные строки (то же можно проделать и с нечетными) и добавим строку, состоящую из единиц. Полученную матрицу обозначим T_d. Таким образом, зададим конус, соответствующий выпуклой оболочке куба C_d. С другой стороны, матрицу T_d можно задать следующим образом: $T_d = \begin{pmatrix} \mathbf{1}^{1\times 2^d} \\ B_d \end{pmatrix}$, где B_d – матрица, столбцами которой являются всевозможные различные векторы, содержащие 0 и 1, длины d. Если к матрице B_d добавить любую четную строку матрицы T, то получим строчечную базу $T_{\mathcal{A}}, |\mathcal{A}| = d+1$, (максимальную линейно независимую подсистему строк) матрицы T. В таком случае, сингулярные многочлены матриц T_d и $T_{\mathcal{A}}$ совпадают.

3. Основные результаты

Известен ([4]) сингулярный многочлен матрицы T :

$$\varphi(\lambda, T) = \left(\lambda - 2^{d-1}\right)^d \cdot \left(\lambda - d2^{d-1}\right).$$

Исследуем с помощью данного сингулярного многочлена миноры матрицы T.

Обозначим сумму квадратов миноров порядка j матрицы T через $\sigma_j(d,T)$, тогда среднее значение квадрата минора $\delta_j(d,T)$ будет вычисляться по формуле

$$\delta_j(d,T) = \frac{\sigma_j(d,\ T)}{\binom{N}{j}\binom{M}{j}}.$$

Рассмотрим поведение величины $\delta_j(d,T)$ при $d \to \infty$ и произвольного порядка j. Ранее автором рассматривалось поведение данной величины матрицы ограничений d-индексных транспортных задач с s суммированиями $(1 \le s \le d)$ при фиксированном d, $n \to \infty$ и произвольном порядке $j \le r$ (см., напр., [3], [5]).

Теорема 1. Если $j = r$, то при $d \to \infty$

$$\delta_r(d,T) \sim \frac{\sqrt{2}\,\pi d}{4}\left(\frac{d+1}{8e}\right)^{d+1}.$$

Если $j = j(d)$, то при $d \to \infty$

$$\delta_j(d,T) \sim \sqrt{2\pi j}\cdot\left(\frac{j}{4e}\right)^j.$$

Следствие 1. *Среднее значение квадрата минора рангового порядка* $\delta_r(d,T)$ *стремится к бесконечности при* $d \to \infty$ *с экспоненциальной скоростью.*

Следствие 2. *Среднее значение минора рангового порядка матрицы* T *с ростом* d *стремится к бесконечности с экспоненциальной скоростью.*

Следствие 3. *При* $j = d - c$, *где постоянная* $c > 0$, *величина* $\delta_j(d,T) \to \infty$ *с экспоненциальной скоростью с ростом* d.

Следствие 4. *При* $j = \alpha d,\ 0 < \alpha < 1$, *величина* $\delta_j(d,T) \to \infty$ *с экспоненциальной скоростью при* $\alpha > \frac{4e}{d}$, *начиная с* $d \ge 11$.

Теорема 2. *Сингулярные многочлены матриц* B_d *и* T_d *вычисляются по следующим формулам:*

$$\varphi(\lambda, B_d) = \left(\lambda - 2^{d-2}\right)^{d-1} \cdot \left(\lambda - (d+1)2^{d-2}\right).$$

$$\varphi(\lambda, T_d) = \det(\lambda E_{d+1} - T_d T_d^T) = \left(\lambda - 2^{d-2}\right)^{d-1} \cdot \left(\lambda^2 - (d+5)2^{d-2}\lambda + 4^{d-2}\right).$$

Пусть $\alpha_j(d,T_d)$ – среднее значение квадрата минора порядка j матрицы T_d:

$$\alpha_j(d,T_d) = \frac{\sigma_j(d,\ T_d)}{\binom{N}{j}\binom{r}{j}}.$$

Рассмотрим поведение величины $\alpha_j(d,T_d)$ при $d \to \infty$ и произвольного порядка j.

Теорема 3. *Если* $j = r$, *то при* $d \to \infty$

$$\alpha_r(d,T_d)\sim\sqrt{2\pi(d+1)}\left(\frac{d+1}{4e}\right)^{d+1}.$$

Если $j<r, C=const$, то при $d\to\infty$

$$\alpha_j(d,T_d)\sim C\left(\frac{d^2}{j}\right)2^{(d-2)(d-1-2j)}\cdot\left(\frac{j}{e}\right)^j.$$

Следствие 5. *Среднее значение квадрата минора матрицы инцидентности вершины-фасеты* d*-мерного куба* $\alpha_j(d,T_d)\to\infty$ *с экспоненциальной скоростью при* $d\to\infty$ *и* $3\le j\le r$.

Литература

1. Мишина А.П., Проскуряков И.В. Высшая алгебра. Линейная алгебра, многочлены, общая алгебра. М.: Наука, 1965.
2. Шевченко В.Н. Качественные вопросы целочисленного линейного программирования. М.: Наука, 1995.
3. Титова Е.Б., Шевченко В.Н. Среднее значение квадрата минора матрицы ограничений аксиальной транспортной задачи. //Автоматика и телемеханика. 2004. № 2. С. 113–117.
4. Шевченко В.Н. Характеристические многочлены многоиндексных транспортных задач. //Дискретная математика Т.15. Вып. 2. 2003. С. 83–88.
5. Титова Е.Б., Шевченко В.Н. О минорах матрицы ограничений многоиндексных транспортных задач. // Дискретная математика. 2012. Т. 24. Вып. 4. С. 147–157.

АРХИТЕКТУРА РАСПРЕДЕЛЕННОЙ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ СИСТЕМЫ НА БАЗЕ МОБИЛЬНЫХ УСТРОЙСТВ[1*]

И.С. Ульяничев

Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН

В статье изложена архитектура математического и программного обеспечения распределенной вычислительной системы на основе множества мобильных устройств, объединенных в общую сетевую инфраструктуру. В основе распределенной вычислительной системы лежит проблемно-ориентированная модель выполнения задач (в зарубежной литературе известная как Task-Based Execution Model). Такая модель распределенных вычислений наиболее предпочтительна при решении оптимизационных и обратных задач, когда множество допустимых наборов входных параметров достаточно велико. При этом сами задачи выполняются независимо, но требуют значительных временных затрат на решение каждой конкретной задачи, сопоставимых со «временем жизни» вычислительного узла. В этом случае помимо масштабируемости важна целостность вычислительной системы, а сама система в общем случае является реконфигурируемой и гетерогенной. Предложенная в статье архитектура позволяет учитывать реконфигурацию сети вычислительных устройств и строить гарантированную оценку масштабируемости распределенной гетерогенной вычислительной системы.

Ключевые слова: Task-Based Execution Model, мобильные вычисления, распределённые вычисления.

1. Введение

Среди множества реализации систем распределенных вычислений перспективным вариантом в части потенциально бесконечного масштабирования является построение вычислительной системы на основе мобильных приложений, которые выступают в роли вычислительных узлов, объединенных единой (например, мобильной или спутниковой) сетью. Согласно оценкам, сделанным одним из популярных сайтов, посвященных мобильным устройствам, через пару лет число используемых смартфонов достигнет 7 миллиардов. При этом только семь часов в сутки смартфон действительно используется пользователями. С учетом высокой производительность мобильных процессоров, установленных в смартфонах, на широком круге задач при задействовании примерно 10 процентов устройств по всему миру можно уже сейчас достигнуть экзафлопсной производительности, что сравнимо с показателями самого быстродействующего суперкомпьютера Frontier. Перед построением вычислительной системы на основе мобильных устройств приведем краткий обзор не только моделей параллельных и распределенных вычислений, но и обзор моделей управления ресурсами и потоками данных, что является ключевой особенностью при программной реализации распределенной гетерогенной вычислительной системы.

2. Архитектура системы распределенных мобильных вычислений

В основе разрабатываемой системы распределенных мобильных вычислений лежит проблемно-ориентированная модель выполнения задач, известная в зарубежной литературе как Task-Based Execution Model. Концептуальная схема модели представлена на рис. 1.

[1*] Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-11-00014.

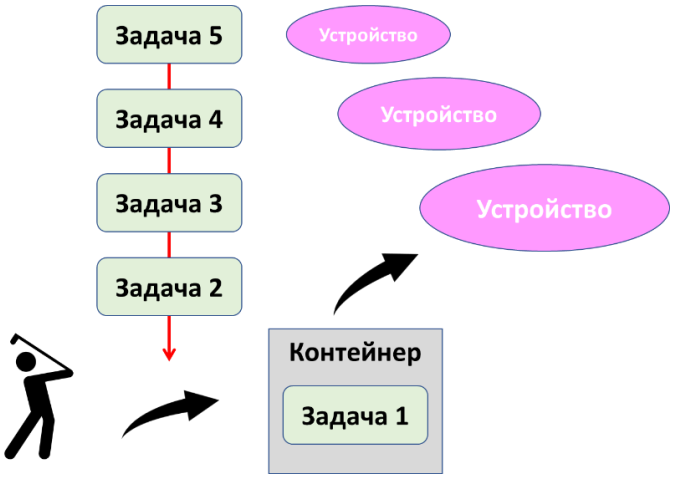


Рис. 1. Схема проблемно-ориентированной модели выполнения задач

В основе модели лежит декомпозиция общей задачи на набор мелких однотипных подзадач, различающихся набором входных параметров. Такие задачи, несмотря на простоту параллельной реализации, охватывают широкий множество приложений: классическая задача оптимизации двигателя летательного аппарата [3], решение обратной задачи восстановления профиля звезды по наблюдаемому остатку взрыва сверхновой [4] и разработка фреймворка для решения гидродинамических задач на основе адаптивных сеток [5]. Каждая задача представляет собой набор входных параметров для некоторой предустановленной на мобильные устройства задачи. При поступлении очередной задачи (набора входных параметров) они отправляются на первой свободное устройство. На рисунке 1 используется понятие «контейнер» в качестве сформированной на счет задачи, то есть в момент упаковки в контейнер приложение, установленное на мобильном устройстве, получает набор входных данных и отправляется на выполнение. Результат выполнения задачи возвращается обратно. Важно отметить, что никак не ограничивается логика планировщика задач, то есть после получения некоторого множества результатов список задач может быть модифицирован и на счет будут отправлены задачи из нового списка. Таким образом мы можем расширить систему на расчеты итерационных и нестационарных процессов с соответствующей дискретизацией.

3. Гарантированная оценка масштабируемости системы

С учётом представленной архитектуры дадим оценку масштабируемости системы. Мы предполагаем что для расчёта времени работы системы нам достаточно знать следующие значения:

t – время, необходимое для расчёта одного блока данных;

N – количество рассчитываемых блоков(в случае задачи трассировки лучей, количество пикселей);

P – количество участвующих в расчёте устройств.

Тогда, обозначив через T время работы системы, в идеальном виде мы получим следующую формулу:

$$T = \frac{Nt}{P}$$

В реальной модели нам следует учитывать ещё несколько параметров:

t_0 – время, необходимое для первоначальной разбивки исходных данных на вычислительные блоки;

t_w – время, записи(write) одного начального блока в базу данных после разбивки;

t_s – время, необходимое для получения одного блока данных клиентом с сервера(send);

t_r – время, необходимое для получения рассчитанного блока данных сервером с клиента(receive);

t_v – время, необходимое для записи результата рассчитанного блока в базу данных(saVe);

Получим время расчёта на p устройствах:

$$T(P) = t_0 + N(t_w + t_v) + P(t_s + t_r) + \frac{Nt}{P}$$

Запишем ускорение:

$$S(P) = \frac{T(1)}{T(P)} = \frac{t_0 + N(t_w + t_v) + (t_s + t_r) + Nt}{t_0 + N(t_w + t_v) + P(t_s + t_r) + \frac{Nt}{P}}$$

При положительных значениях всех параметров и при P ≥1 функция, определяемая формулой, обладает следующими свойствами:

S(1) = 1

S(P) > 0

$\lim_{p\to\infty} S(p) = \frac{1}{P}$

Пусть все параметры в формуле положительны. Тогда функция S(P), определяемая формулой, имеет единственный экстремум на интервале (1; +∞) , являющийся максимумом.

S`(P)=0 при

$$P = \sqrt{\frac{Nt}{t_s + t_r}}$$

Это число устройств, при котором достигается максимум ускорения.

4. Программная реализация системы распределенных мобильных вычислений

Предлагаемая нами система DHCA имеет клиент-серверную архитектуру и заточена под систему Android. Мобильный клиент написан с использование новейших подходов Android к фоновым вычислениям, что позволяет увеличить производительность, а также повысить безопасность конечных пользователей. Система учитывает все особенности взаимодействия клиент-серверной архитектуры для распределённых систем[1, 2, 12], а также решает проблему связанные с недоступностью вычислительных узлов, путем автоматического перераспределения задач. Подход Task-Based Execution Model позволяет уменьшить кол-во передаваемой информации между сервером и узлом, что в свою очередь повышает общую производительность. Открытый исходный код повышает доверие к системе со стороны конечных пользователей, что может благоприятно сказаться на количестве активных участников вычислений.

Web-клиент представляет собой web-приложение, написанное на PHP. Взаимодействие пользователя с интерфейсом web-клиента осуществляется с помощью JavaScript-библиотеки jQuery, позволяющей отправлять запросы и получать данные от сервера в асинхронном режиме. Взаимодействие с сервером осуществляется посредством HTTP-запросов REST API, написанной на языке PHP.

Сервер системы DHCA представляет собой web-сервер с поддержкой PHP, с подключенной базой MySQL. Благодаря модульной архитектуре используемой API, к системе можно подключить любую реляционную СУБД поддерживающую язык структурированных запросов SQL. За подключение базы данных и обработку запросов отвечает класс **database** написанный на PHP. Для смены СУБД достаточно подменить данный класс, оставив основные используемые функции.

Мобильный клиент представляет собой приложение, установленное на смартфоне под управление операционной системы Android версии 6.0(Marshmallow) и выше. Клиент написан на языке Kotlin с использованием шаблона проектирования MVVM.

Все взаимодействия с серверным API мобильный клиент осуществляет с помощью библиотеки Retrofit, предназначенной для обработки HTTP-запросов. Все данные возвращаются в формате JSON.

Информационные сообщения на мобильный клиент отправляются с помощью библиотеки Firebase Cloud Messaging(FCM).

5. Заключение

Изложена архитектура распределенной вычислительной системы на основе множества мобильных устройств, объединенных в общую сетевую инфраструктуру. В основе распределенной вычислительной системы лежит проблемно-ориентированная модель выполнения задач. Ограничение «времени жизни» устройства накладывает требования не только на масштабируемость, но и на целостность вычислительной системы. Предложенная в работе архитектура позволяет учитывать реконфигурацию сети вычислительных устройств и строить гарантированную оценку масштабируемости распределенной гетерогенной вычислительной системы

Литература

1. Низамов Н.Р., Шахова И.С. Механизмы применения мобильных устройств для задач распределенных вычислений // Электронные библиотеки. - 22(4). – 2019. – С. 200-213.
2. M. Prem Kumar, R.R. Bhat, S.R. Alavandar and V. S. Ananthanarayana Distributed Public Computing and Storage using Mobile Devices // 2018 IEEE Distributed Computing, VLSI, Electrical Circuits and Robotics (DISCOVER). – 2018. - P. 82-87.
3. Pratt T.K., Seitelman L.H., Zampano R.R., Murphy C.E., Landis F. Optimization applications for aircraft engine design and manufacture // Advances in Engineering Software. – 1993. – V. 16, I. 2. – P. 111-117.
4. Kabanikhin S.I., Kulikov I.M., Shishlenin M.A. An algorithm for recovering the characteristics of the initial state of supernova // Computational Mathematics & Mathematical Physics. – 2020. – V. 60, I. 6. – P. 1008-1016.
5. Stone J., Tomida K., White C., Felker K. The Athena++ Adaptive Mesh Refinement Framework: Design and Magnetohydrodynamic Solvers // The Astrophysical Journal Supplement Series. – 2020. – V. 249. – Article Number 4.
6. Kulikov I.M., Chernykh I.G., Tutukov A.V. Mathematical Modeling of a High-Speed Collision of White Dwarfs-the Explosion Mechanism of Type Ia/Iax Supernovae // Journal of Applied and Industrial Mathematics . – 2022. – V. 16. – P. 80-88.
7. Kulikov I.M., Chernykh I.G., Ulyanichev I.S., Tutukov A.V. Mathematical Simulation of Nuclear Carbon Burning in White Dwarfs Using a 7-Isotope Reaction Network // Journal of Applied and Industrial Mathematics . – 2022. – V. 16. – P. 440-448.
8. Kulikov I. GPUPEGAS: A New GPU-accelerated Hydrodynamic Code for Numerical Simulations of Interacting Galaxies // The Astrophysical Journal Supplements Series. – 2014. – V. 214. – Article Number 12.
9. Kulikov I.M., Chernykh I.G., Snytnikov A.V., Glinskiy B.M., Tutukov A.V. AstroPhi: A code for complex simulation of dynamics of astrophysical objects using hybrid supercomputers // Computer Physics Communications. – 2015. – V. 186. – P. 71-80.
10. Kulikov I., Chernykh I., Karavaev D., Sapetina A. The Energy Efficiency Research of Godunov Method on Intel Xeon Scalable Architecture // IEEE. 2021 Ivannikov Ispras Open Conference (ISPRAS). – 2022. – Article Number 21722440.
11. Kulikov I., Chernykh I., Karavaev D., Sapetina A., Lomakin S. The Efficiency of Hydrodynamic Code on Intel Xeon Scalable Architecture // IEEE. 2021 Ivannikov Memorial Workshop (IVMEM). – 2022. – Article Number 21704168.
12. Mustafa Y. Arslan Computing While Charging: Building a Distributed Computing Infrastructure Using Smartphones// Proceedings of the 8th international conference on Emerging networking experiments and technologies. – 2012. – P. 193–204.

КРИТЕРИЙ ПОДОБИЯ НАД КОЛЬЦОМ ЦЕЛЫХ ЧИСЕЛ НЕКОТОРЫХ НИЛЬПОТЕНТНЫХ МАТРИЦ ПЯТОГО ПОРЯДКА[1*]

Г.В. Уткин

Нижегородский госуниверситет им. Н.И. Лобачевского

Получен критерий подобия над кольцом целых чисел некоторых верхних треугольных нильпотентных матриц 5-го порядка с одной и двумя супердиагоналями.

Ключевые слова: подобие матриц, нильпотентная матрица, жорданова клетка, кольцо целых чисел.

1. Введение

Задаче подобия матриц над кольцом $\mathbb{Z}$ посвящено довольно большое число работ. Общий алгоритм распознавания подобия был получен независимо в [1, 2]. Различные частные случаи рассматриваются, например, в [3, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 11, 12]. Задача о целочисленном подобии матриц находит приложения и в топологии (см., например, [6]).

В работе [5] исследуется вопрос о распознавании подобия над $\mathbb{Z}$ верхних треугольных нильпотентных матриц максимального ранга, у которых все супердиагонали нулевые, кроме, быть может, первых двух (супердиагональю мы называем любую наддиагональ матрицы). В [5] получены необходимые условия подобия таких матриц и критерий подобия для матриц 3-го и 4-го порядков. В настоящей работе обобщены результаты из [5] на случай матриц 5-го порядка с некоторыми дополнительными ограничениями.

Определение 1. *Будем говорить, что матрица $A \in \mathbb{Z}^{n\times n}$ подобна матрице $B \in \mathbb{Z}^{n\times n}$ над кольцом целых чисел $\mathbb{Z}$, если существует такая унимодулярная матрица $X \in GL(n,\mathbb{Z})$, что $AX = XB$. При этом матрицу X называют трансформирующей.*

Если матрицы A и B подобны над $\mathbb{Z}$, то будем обозначать это так: $A\sim B$.

Известно (см. [3, 5]), что если матрицы A и B – нильпотентные верхние треугольные, причём все элементы их первых супердиагоналей отличны от 0, и $A\sim B$, то существует унитреугольная трансформирующая матрица X (т.е. X – верхняя треугольная матрица с единичной диагональю).

2. Критерий подобия матриц пятого порядка

В этом разделе мы получим критерий подобия над кольцом целых чисел нильпотентных матриц следующего вида:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & b_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_3 & b_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (1)$$

где $a_i \neq 0$ $(i = 1,2,3,4)$ и некоторыми дополнительными ограничениями. Матрицу B будем обозначать $B = superdiag(a_1, a_2, a_3, a_4)$. Одной из причин, по которой представляет интерес получение критерия подобия над $\mathbb{Z}$ матриц вида (1), является следующее обстоятельство. Если

[1*] Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 21-11-00194).

$a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 1$, т.е. матрица $B = superdiag(1,1,1,1)$ является жордановой клеткой, то $A \sim B$ при любых $b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{Z}$ (см. критерий подобия жордановой клетке в [7]). Оказывается, что есть и другие значения a_1, a_2, a_3, a_4, такие, что матрицы вида (1) подобны над $\mathbb{Z}$ при любых $b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{Z}$ (см. Следствие 2 ниже).

Как уже было отмечено выше, если матрицы A и B вида (1) подобны над $\mathbb{Z}$, то существует унитреугольная трансформирующая матрица

$$X = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 & w_1 \\ 0 & 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 0 & 0 & 1 & x_3 & y_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \qquad (2)$$

Поскольку для такой матрицы X условие $X \in GL(5, \mathbb{Z})$ автоматически выполняется, то равенство $AX = XB$ превращается в систему линейных уравнений над $\mathbb{Z}$. Таким образом, $A \sim B$ тогда и только тогда, когда эта система имеет решение в целых числах. Известен следующий критерий совместности в целых числах системы линейных уравнений.

Теорема 1. (*см.* [*13, с. 51*]). *Пусть* $P \in \mathbb{Z}^{m \times n}$ *– матрица ранга* m *и* $b \in \mathbb{Z}^m$. *Тогда система* $Px = b$ *имеет целочисленные решения тогда и только тогда, когда все миноры порядка* m *расширенной матрицы* (P, b) *делятся на наибольший общий делитель* $\Delta_m(P)$ *всех миноров порядка* m *матрицы* P.

В следующей теореме устанавливается критерий подобия над $\mathbb{Z}$ матриц вида (1).

Теорема 2. *Рассмотрим матрицы вида* (1). *Пусть* $НОД(a_1, a_4) = 1$ *и* $НОД(a_1a_2, a_2a_3, a_3a_4) = 1$. *Тогда* $A \sim B$ *тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:*

1) $(a_1b_2 + b_1a_3) \vdots a_2$,
2) $(a_2b_3 + b_2a_4) \vdots a_3$,
3) $(a_1a_2b_3 + a_1a_4b_2 + a_3a_4b_1) \vdots a_2a_3$.

Доказательство. Поскольку трансформирующая матрица X имеет вид (2), то условие $AX = XB$ равносильно системе линейных уравнений. Выпишем матрицу системы $AX = XB$:

$$\left(\begin{array}{ccccccccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & y_1 & y_2 & y_3 & z_1 & z_2 & \\ a_2 & -a_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & a_3 & -a_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_2 \\ 0 & 0 & a_4 & -a_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_3 \\ 0 & 0 & -b_1 & 0 & a_3 & -a_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -b_2 & 0 & a_4 & -a_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -b_1 & a_4 & -a_1 & 0 \end{array}\right)$$

Мы хотим выяснить, при каких условиях эта система имеет целочисленное решение. Система $AX = XB$ состоит из трёх подсистем.

Третья подсистема, состоящая из одного уравнения, $a_4z_1 - a_1z_2 = b_1y_3$, имеет решение при любом y_3, так как $НОД(a_1, a_4) = 1$.

Вторая подсистема $\begin{cases} a_3y_1 - a_1y_2 = b_1x_3 \\ a_4y_2 - a_2y_3 = b_2x_4 \end{cases}$ совместна в целых числах при любых x_3, x_4 по Теореме 1, так как наибольший общий делитель миноров второго порядка её основной матрицы

$$\begin{pmatrix} a_3 & -a_1 & 0 \\ 0 & a_4 & -a_2 \end{pmatrix}$$

равен $НОД(a_1a_2, a_2a_3, a_3a_4) = 1$.

Осталось выяснить, когда первая подсистема $\begin{cases} a_2x_1 - a_1x_2 = b_1 \\ a_3x_2 - a_2x_3 = b_2 \\ a_4x_3 - a_3x_4 = b_3 \end{cases}$ имеет решения. Наибольший общий делитель миноров третьего порядка её основной матрицы

$$\begin{pmatrix} a_2 & -a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_3 & -a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_4 & -a_3 \end{pmatrix}$$

равен

$$\Delta_3 = \text{НОД}(a_1a_2a_3, a_2a_2a_3, a_2a_3a_3, a_2a_3a_4) = a_2a_3\text{НОД}(a_1, a_2, a_3, a_4).$$

Поскольку по условию теоремы $\text{НОД}(a_1, a_4) = 1$, то $\text{НОД}(a_1, a_2, a_3, a_4) = 1$, поэтому $\Delta_3 = a_2a_3$.

Согласно Теореме 1 первая подсистема совместна над кольцом целых чисел тогда и только тогда, когда все миноры 3-го порядка её расширенной матрицы делятся на $\Delta_3 = a_2a_3$. Выпишем те из них, которые отличны от миноров основной матрицы (миноры 3-го порядка основной матрицы автоматически делятся на Δ_3):

$$M_1 = \begin{vmatrix} a_2 & -a_1 & b_1 \\ 0 & a_3 & b_2 \\ 0 & 0 & b_3 \end{vmatrix} = a_2a_3b_3, \qquad M_2 = \begin{vmatrix} a_2 & 0 & b_1 \\ 0 & -a_2 & b_2 \\ 0 & a_4 & b_3 \end{vmatrix} = -a_2(a_2b_3 + b_2a_4),$$

$$M_3 = \begin{vmatrix} a_2 & 0 & b_1 \\ 0 & 0 & b_2 \\ 0 & -a_3 & b_3 \end{vmatrix} = a_2a_3b_2, \qquad M_4 = \begin{vmatrix} -a_1 & 0 & b_1 \\ a_3 & -a_2 & b_2 \\ 0 & a_4 & b_3 \end{vmatrix} = a_1a_2b_3 + a_1a_4b_2 + a_3a_4b_1,$$

$$M_5 = \begin{vmatrix} -a_1 & 0 & b_1 \\ a_3 & 0 & b_2 \\ 0 & -a_3 & b_3 \end{vmatrix} = -a_3(a_1b_2 + b_1a_3), \qquad M_6 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & b_1 \\ -a_2 & 0 & b_2 \\ a_4 & -a_3 & b_3 \end{vmatrix} = a_2a_3b_1.$$

Миноры M_1, M_3, M_6 заведомо делятся на $\Delta_3 = a_2a_3$. Минор M_2 делится на $\Delta_3 = a_2a_3$ тогда и только тогда, когда $(a_2b_3 + b_2a_4) \vdots a_3$. Минор M_5 делится на $\Delta_3 = a_2a_3$ тогда и только тогда, когда $(a_1b_2 + b_1a_3) \vdots a_2$. Наконец, минор M_4 делится на $\Delta_3 = a_2a_3$ тогда и только тогда, когда $(a_1a_2b_3 + a_1a_4b_2 + a_3a_4b_1) \vdots a_2a_3$.

■

Оказывается, что если $\text{НОД}(b_2, a_2a_3) = 1$, то третье условие в предыдущей теореме вытекает из первых двух, т.е. является избыточным.

Следствие 1. *Рассмотрим матрицы вида* (1). *Пусть* $\text{НОД}(a_1, a_4) = 1$, $\text{НОД}(a_1a_2, a_2a_3, a_3a_4) = 1$, $\text{НОД}(b_2, a_2a_3) = 1$. *Тогда* $A \sim B$ *тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:*

$$1)\ (a_1b_2 + b_1a_3) \vdots a_2,$$
$$2)\ (a_2b_3 + b_2a_4) \vdots a_3.$$

Доказательство. Пусть $f = a_1b_2 + b_1a_3$, $g = a_2b_3 + b_2a_4$, $h = a_1a_2b_3 + a_1a_4b_2 + a_3a_4b_1$. Теорема 2 говорит о том, что $A \sim B$ тогда и только тогда, когда $f \vdots a_2$, $g \vdots a_3$, $h \vdots a_2a_3$. Заметим, что $fg = (a_1b_2 + b_1a_3)(a_2b_3 + b_2a_4) = b_2h + a_2a_3b_1b_3$, поэтому если $f \vdots a_2$, $g \vdots a_3$, то $b_2h \vdots a_2a_3$. Стало быть, если $\text{НОД}(b_2, a_2a_3) = 1$, то $h \vdots a_2a_3$.

■

Следствие 2. *Если* $\text{НОД}(a_1, a_4) = 1$ и $a_2a_3 = 1$, *то* $A \sim B$ *для любых* $b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{Z}$.

Благодарности

Автор выражает особую благодарность Сидорову Сергею Владимировичу за полезные наставления, ценные советы и замечания, постоянное внимание к работе и рекомендации по оформлению.

Литература

1. Sarkisjan R.A. Conjugacy problem for sets of integral matrices // Math. Notes. 1979. Vol 25, No 6. P. 419–426. DOI: https://doi.org/10.1007/BF01230982

2. Grunewald F.J. Solution of the Conjugacy Problem in Certain Arithmetic Groups, Word Problems II, 1980, P. 101–139 DOI: https://doi.org/10.1016/S0049- 237X(08)71335-1.
3. Husert D. Similarity of integer matrices, PhD Thesis, University of Paderborn, 2017.
4. Appelgate H., Onishi H. The similarity problem 3×3 integer matrices // Linear Algebra Appl. 1982. Vol 42. P. 159–174.
5. Сидоров С.В., Уткин Г.В. О подобии над кольцом целых чисел некоторых нильпотентных матриц максимального ранга // Журнал Средневолжского математического общества. 2023. Т. 25, № 4. [В печати]
6. Сидоров С.В., Чилина Е.Е. О негиперболических алгебраических автоморфизмах двумерного тора // Журнал Средневолжского математического общества.. 2021. Т. 23, № 3. С. 295–307.
7. Сидоров С.В. О подобии некоторых целочисленных матриц с единственным собственным значением над кольцом целых чисел // Матем. заметки. 2019. Т. 105, № 5. С. 763–770.
8. Сидоров С.В. О подобии матриц третьего порядка над кольцом целых чисел, имеющих приводимый характеристический многочлен // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. 2009. № 1. С. 119–127
9. Сидоров С.В. Выделение эффективно разрешимых классов в задаче подобия матриц над кольцом целых чисел, дис. канд. физ.-мат. наук: 01.01.09: защищена 15.10.15: утв. 21.03.16, Нижний Новгород, 2015.
10. Сидоров С.В. О подобии матриц с целочисленным спектром над кольцом целых чисел // Известия высших учебных заведений. Математика. 2011. № 3. С. 86–94.
11. Шевченко В.Н., Сидоров С.В. О подобии матриц второго порядка над кольцом целых чисел // Известия высших учебных заведений. Математика. 2006. № 4. С. 57– 64.
12. Newman M. Integral matrices. Academic Press, New York and London, 1972.
13. Schrijver A. Theory of Linear and Integer Programming. Wiley, 1998.

МУЛЬТИСТАБИЛЬНОСТЬ ВБЛИЗИ ГРАНИЦЫ ОБОБЩЕННОЙ СИНХРОНИЗАЦИИ В СИСТЕМАХ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ[1*]

В.А. Ханадеев, О.И. Москаленко

Саратовский национальный исследовательский госуниверситет имени Н.Г. Чернышевского,
Региональный научно-образовательный математический центр
«Математика технологий будущего»

Исследована возможность существования мультистабильности вблизи границы обобщенной синхронизации в однонаправленно связанных генераторах с запаздыванием. Рассмотрен случай взаимодействия систем, характеризующихся различным количеством положительных показателей Ляпунова. В качестве методов диагностики использовались метод расчета меры мультистабильности и метод расчета показателей Ляпунова для систем с запаздыванием.

Ключевые слова: мультистабильность, обобщенная синхронизация, однонаправленно связанные системы, системы с запаздыванием, вероятность наблюдения турбулентной фазы.

1. Введение

Мультистабильность представляет из себя уникальное явление, наблюдаемое в системах различной природы [1]. Наличие мультистабильности подразумевает сосуществование различных аттракторов в фазовом пространстве динамической системы при фиксированных параметрах, но различных начальных значениях. Данное явление может встречаться в физике, электронике, оптике, механике, биологии и т.д. [2-3].

В настоящее время известно, что явление мультистабильности встречается на границе режима обобщенной синхронизации в системах различных видов [4]. Данный режим означает установление связи между состояниями взаимодействующих систем в виде функционала, а мультистабильность в данном контексте подразумевает, что в зависимости от выбора начальных условий систем в различные моменты времени режим обобщенной синхронизации может как наблюдаться, так и отсутствовать. Такое явление характерно для потоковых систем и дискретных отображений, однако, вопрос о присутствии мультистабильности вблизи границы обобщенной синхронизации в системах с запаздыванием ранее не рассматривался. В настоящей работе впервые показано наличие данного режима в двух однонаправленно связанных генераторах с запаздыванием, характеризующихся различным числом положительных показателей Ляпунова.

2. Объект и методы исследования

В качестве объекта исследования выбрана система, описываемая следующими уравнениями [5]:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= -x_1(t) + k_1 f\big(x_1(t-\tau)\big), \\ \dot{x}_2(t) &= -x_2(t) + k_2 f\big(x_2(t-\tau)\big) + k_3\big[f\big(x_1(t-\tau)\big) - f\big(x_2(t-\tau)\big)\big], \end{aligned} \tag{1}$$

где $x_1(t)$ и $x_2(t)$ – переменные, характеризующие поведение ведущей и ведомой систем соответственно, k_1 и k_2 – параметры этих систем, k_3 – параметр связи, $f(x) = a - x^2$ – нелинейная функция, $a = 1.5$ – управляющий параметр, время запаздывания $\tau = 10$ выбрано одинаковым для обе-

[1*] Работа выполнена при финансовой поддержке Совета по грантам Президента Российской Федерации для государственной поддержки молодых российских ученых – докторов наук (проект № МД-18.2022.1.2).

их систем. Управляющие параметры k_1 и k_2 характеризуют режимы, наблюдаемые в ведущей и ведомой системах. При значениях $k_1 = 1.005$ и $k_2 = 1.013$ в ведущей системе присутствуют один положительный показатель Ляпунова, а в ведомой два. Иными словами, в данном случае ведомая система в режиме хаоса оказывает влияние на систему, находящуюся в режиме гиперхаоса.

Для диагностики обобщенной синхронизации в системе (1) использовался метод расчета спектр показателей Ляпунова для систем с отклоняющимся аргументом [6] и метод расчета меры мультистабильности [7].

Для расчета количественной характеристики степени мультистабильности рассматривался ансамбль из $N = 100$ ведомых систем с запаздыванием, находящихся под воздействием одной и той же ведущей системы. При этом, значения начальных условий ведомых систем отличались, а значения управляющих параметров были одинаковыми. Согласно методу, предложенному в работе [7], проводилось сравнение состояний ведомых систем между собой и вычислялось количество систем, состояния которых оказывались идентичными друг другу. Таким образом, мера мультистабильности рассчитывалась по следующей формуле:

$$P_a = 1 - \sum_{i=1}^{N} \frac{m}{N(N-1)} \quad (2)$$

где m – число пар, в которых состояния ведомых систем совпадают, N – общее число пар осцилляторов в ансамбле. Совпадение состояний ведомых систем согласно методу вспомогательной системы [8] означает, что система находится в режиме обобщенной синхронизации. Соответственно, если $P_a = 0$, то в системе диагностируется обобщённая синхронизация.

3. Результаты исследования

На рисунке 1a приведены результаты проведенных исследований. Для расчета спектра показателей Ляпунова однонаправленно связанных систем с запаздыванием (1), как отмечалось выше, использовался метод, предложенный в работе [6].

Из рисунка 1a видно, что изначально, в отсутствие связи между системами, присутствуют три положительных показателя Ляпунова, что соответствует тому, что взаимодействуют системы с одним и двумя положительными показателями Ляпунова. При увеличении параметра связи k_3 в системе происходит поочередный переход двух положительных показателей Ляпунова в область отрицательных значений, далее второй показатель Ляпунова возвращается к положительным значениям и затем опять принимает отрицательные значения. При этом, показатель, отвечающий за ведущую систему, остается неизменным. Когда остается единственный положительный показатель Ляпунова, в системе окончательно устанавливается режим обобщенной синхронизации.

На рис 1b представлена зависимость меры мультистабильности от управляющего параметра k_3. Данная зависимость представляет из себя усреднение по времени вероятности (2) нахождения систем в асинхронном режиме. Видно, что при увеличении параметра связи значения уменьшаются 1 до 0. При этом, вблизи границы обобщенной синхронизации мера мультистабильности оказывается положительной, что свидеельствует о наличии мультистабильности в данном случае.

4. Заключение

Таким образом, в настоящей работе обнаружена мультистабильность вблизи обобщенной синхронизации в однонаправленно связанных системах с запаздыванием. С помощью расчета количественной меры мультистабильности диагностировано начало обобщенной синхронизации и наличие мультистабильности вблизи ее границы. Полученные результаты согласуются с данными, полученными с помощью расчета спектра показателей Ляпунова.

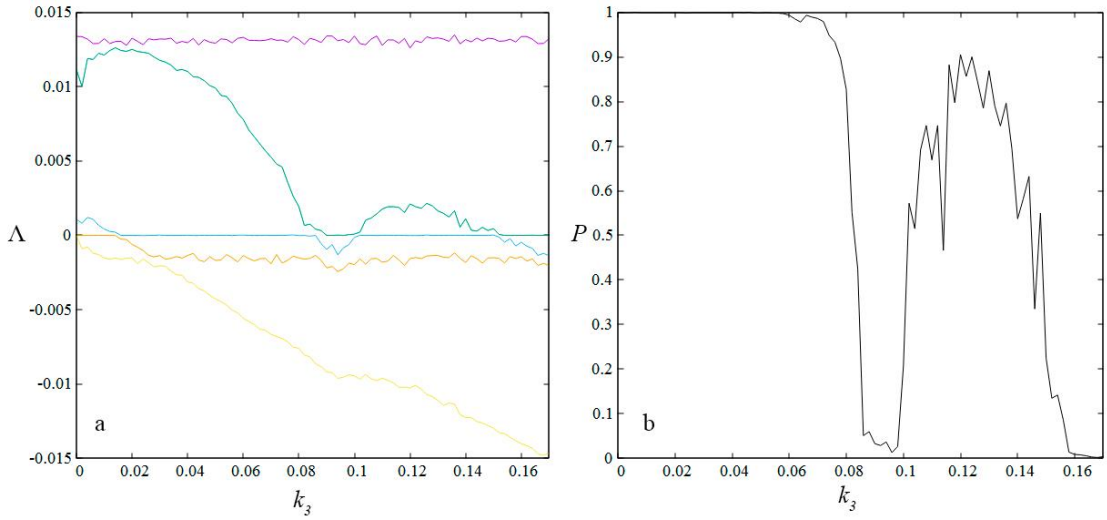


Рис. 2 a)Зависимости пяти старших показателей Ляпунова от параметра связи k_3 при $k_1 = 1.005$, $k_2 = 1.013$ для однонаправленно связанных генераторов с запаздыванием; b) Зависимость меры мультистабильности (усредненной по времени вероятности нахождения турбулентных фаз P_a) от параметра связи k_3

Литература

1. Pisarchik A.N., Feudel U. Control of multistability // Physics Reports. 2014. Vol. 540, No. 4. P. 167–218. DOI: 10.1016/j.physrep.2014.02.007.
2. Maurer J.C., Libchaber A. Effect of the Prandtl number on the onset of turbulence in liquid 4He // J. Phys. Lett. 1980. Vol. 41, No. 21, P. 515–518. DOI: 10.1051/jphyslet:019800041021051500.
3. Foss J., Longtin A., Mensour B., Milton J. Multistability and delayed recurrent loops // Phys. Rev. 1996. Vol. 76, No. 4. P. 708–711. DOI: 10.1103/PhysRevLett.76.708.
4. Москаленко О. И., Евстифеев Е. В. О существовании мультистабильности вблизи границы обобщенной синхронизации в однонаправленно связанных системах со сложной топологией аттрактора // Известия вузов. ПНД. 2022. Т. 30, №. 6. С. 676–684. DOI: 10.18500/0869-6632-003013.
5. Пономаренко В.И., Прохоров М.Д. Экспериментальное исследование синхронизации неидентичных нейроподобных осцилляторов с адаптивной запаздывающей связью// Письма в ЖТФ. 2002. Т. 28, №. 16. С. 37–44. DOI: 10.21883/PJTF.2018.17.46565.1736.
6. Колоскова А.Д., Москаленко О.И., Короновский А.А. Метод расчета спектра показателей Ляпунова для систем с запаздыванием// Письма в ЖТФ. 2018. Т. 44, №. 9. С. 19–25. DOI: 10.21883/PJTF.2018.09.46061.17167.
7. Москаленко О.И., Короновский А.А., Сельский А.О., Евстифеев Е.В. Метод определения характеристик перемежающейся обобщенной синхронизации, основанный на вычислении вероятности наблюдения синхронного режима // Письма в ЖТФ. 2022. Т. 48, №. 2. С. 3–6. DOI: 10.21883/PJTF.2020.16.49846.18359.
8. Abarbanel H.D.I., Rulkov N.F., Sushchik M.M. Generalized synchronization of chaos: The auxiliary system approach // Phys. Rev. E. 1996. Vol. 53, No. 5. P. 4528–4535. DOI: 10.1103/PhysRevE.53.4528.

СОСУЩЕСТВОВАНИЕ И ПЕРЕКЛЮЧЕНИЯ СИНХРОННЫХ РЕЖИМОВ В МОДЕЛИ ТРЕХМАШИННОЙ ЭНЕРГОСЕТИ[1*]

В.А. Храменков

Институт прикладной физики РАН

В работе рассматривается модель энергосети, состоящей из трех генераторов, питающих общую нагрузку, причем линия передачи у одного из генераторов намного короче, чем у остальных или/и она снабжена конденсаторами продольной компенсации. Установлено, что такая сеть может быть представлена в виде редуцированной эффективной сети (effective network – EN) с хаб-топологией. Показано, что в зависимости от параметров в трехмашинной энергосети может существовать один синхронный режим или сосуществовать два синхронных режима с различными распределениями токов по линиям. Изучена устойчивость сосуществующих синхронных режимов к различным возмущениям.

Ключевые слова: энергосеть, синхронный режим, бистабильность, шум.

1. Введение

Основным условием надежной работы энергосети является установление и поддержание синхронного режима работы генераторов для обеспечения бесперебойного энергоснабжения потребителей [1]. Нарушение синхронной работы одного или нескольких генераторов может приводить к значительным колебаниям токов и напряжений, вызывающим срабатывание устройств релейной защиты, которые отключают линии передачи, что приводит к расстройству энергоснабжения потребителей, при этом в сети устанавливается асинхронный режим, который является аварийным. Известно, что в энергосетях могут сосуществовать несколько синхронных режимов, различающихся распределением потоков мощности, токов и узловыми напряжениями. Даже если сеть работает в наиболее оптимальном синхронном режиме, возмущения могут привести к переключению на другой синхронный режим с неудовлетворительными характеристиками или к переходу в асинхронный режим.

В данной работе на примере EN [2] модели трехмашинной энергосети установлено сосуществование двух синхронных режимов, различающихся распределениями токов по цепям сети, изучена их устойчивость по отношению к различным возмущениям [3].

2. Модель

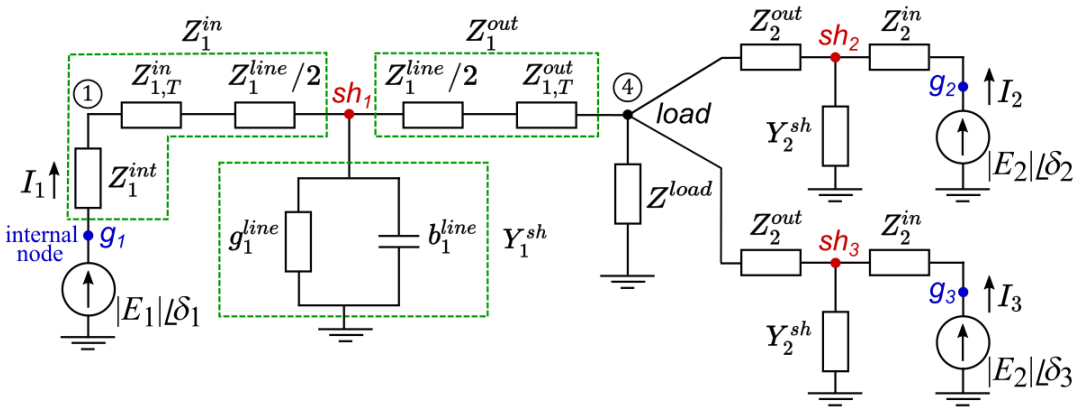
В рамках EN модели энергосеть рассматривается как сеть из генераторов (синхронных машин), питающих нагрузки (потребителей) в виде постоянных импедансов, посредством пассивных цепей (линий передачи). С помощью стандартных методов расчета электрических цепей исходная энергосеть может быть преобразована к эффективной сети с глобально связанными узлами-генераторами (узлы подключения генераторов). Состояние каждого генератора определяется механическим углом его ротора δ_i, который отсчитывается относительно оси, вращающейся с опорной частотой сети. Динамика узла эффективной сети задается уравнением движения ротора генератора, которое в системе относительных единиц имеет вид

$$C_i \frac{d^2\delta_i}{dt^2} = A_i - D_i \frac{d\delta_i}{dt} - \sum_{j=1, j\neq i}^{n} K_{i,j} \sin\left(\delta_i - \delta_j - \alpha_{i,j}\right), i = 1,2,\dots,n \qquad (1)$$

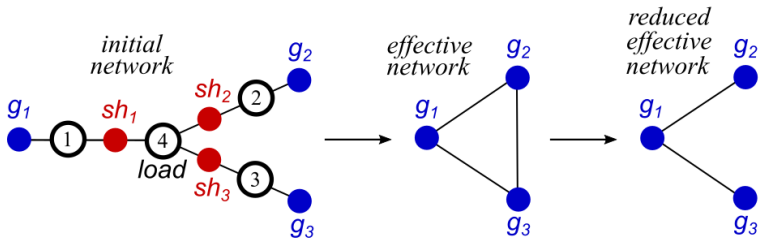
[1*] Исследование динамики модели трехмашинной энергосети поддержано научно-образовательным математическим центром «Математика технологий будущего» (Соглашение № 075-02-2023-911). Исследование нелокальной устойчивости синхронных режимов выполнено в рамках государственного задания ИПФ РАН (Проект № FFUF-2021-0011).

где C_i – константа, значение которой определяется выбором системы относительных единиц, $A_i = P_{T,i} - |E_i|^2|Y_{i,i}|\sin(\alpha_{i,i})$ – вспомогательный параметр, $P_{T,i}$ – мощность турбины генератора, $|E_i|$ – модуль ЭДС генератора, D_i – демпферный коэффициент, $K_{i,j} = |E_i||E_j||Y_{i,j}|$ – сила связи -го и j-го узлов эффективной сети ($i \neq j$), $Y_{i,i} = |Y_{i,i}|e^{-i\psi_{i,i}}$ и $Y_{j,i} = Y_{i,j} = |Y_{i,j}|e^{-i\psi_{i,j}}$ – собственные и взаимные комплексные проводимости ветвей, содержащих i-ый и j-ый источники ЭДС (генераторы), $\alpha_{k,l} = \pi/2 - \psi_{k,l}$ – дополняющие углы, n – число генераторов.

Рассмотрим схему замещения энергосети (рис. 1a), состоящей из трех генераторов ($|E_i|, \delta_i, Z_i^{int}$), питающих общую нагрузку (Z_{load}), посредством линий передачи (Z_i^{line}, $Y_i^{sh} = g_i^{line} + ib_i^{line}$) и трансформаторов ($Z_{i,T}^{in}, Z_{i,T}^{out}$). Для простоты предположим, что второй и третий



(a)



(b)

Рис. 1. Схема замещения трехмашинной энергосети и ее параметры (a). Переход от исходной энергосети к эффективной сети и редуцированной эффективной сети с хаб-топологией (b)

генераторы, равно как и их передающие системы, имеют одинаковые характеристики (рис. 1a). В этом случае установлено, что коэффициенты связи узлов эффективной сети $K_{1,2} = K_{1,3}$ и $K_{2,3}$ связаны соотношением

$$\frac{K_{2,3}}{K_{1,2}} = \frac{|E_2||R_1|}{|E_1||R_2|}, \tag{2}$$

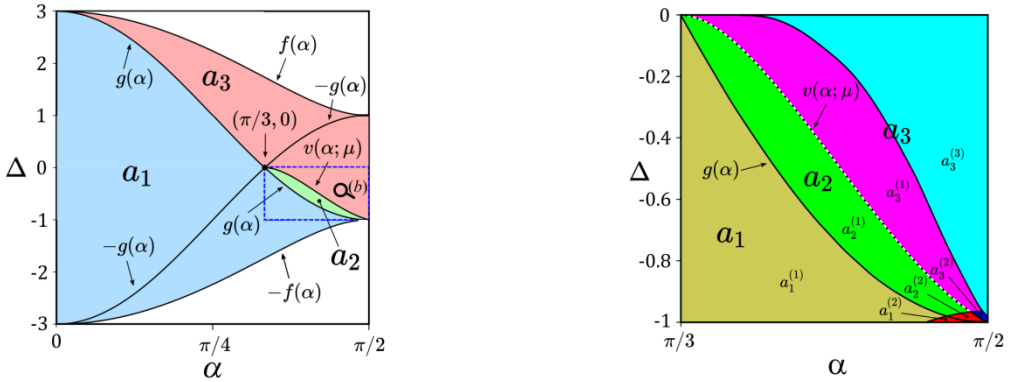
где $R_i = Z_i^{in} + Z_i^{out} + Y_i^{sh} Z_i^{in} Z_i^{out}$. В случае, когда линии передачи всех генераторов имеют одинаковые удельные параметры, а линия первого генератора значительно короче, чем у второго (третьего) генератора или/и она снабжена конденсаторами продольной компенсации, имеет место неравенство $|R_1| \ll |R_2|$. Поэтому, предполагая $|E_1|$ и $|E_2|$ величинами одного порядка, получаем неравенство $K_{2,3} \ll K_{1,2}$, которое позволяет в первом приближении не учитывать связь между вторым и третьим узлами эффективной сети и рассматривать редуцированную эффективную сеть (рис. 1b). Динамика ее узлов задается уравнениями (1) с отличными от нуля коэффициентами $K_{1,2}$ и $K_{1,3}$. Эти уравнения могут быть переписаны в виде

$$\begin{cases} \dot{\varphi}_1 = y_1, \\ \dot{\varphi}_2 = y_2, \\ \dot{y}_1 = \Delta - \mu y_1 - 2\cos(\alpha)\sin(\varphi_1) - \sin(\varphi_2 - \alpha), \\ \dot{y}_2 = \Delta - \mu y_2 - 2\cos(\alpha)\sin(\varphi_2) - \sin(\varphi_1 - \alpha), \end{cases} \tag{3}$$

где $\varphi_1 = \delta_1 - \delta_2,\ \varphi_2 = \delta_1 - \delta_3,\ \Delta = (A_1 - A_2)/K,\ \alpha = \alpha_{1,2},\ \mu = D/\sqrt{CK},\ t_{new} = t\sqrt{K}/\sqrt{C},$ $C_i = C,\ D_i = D, A_2 = A_3$, точкой же обозначено дифференцирование по времени t_{new}.

3. Синхронные режимы работы энергосети

Синхронным режимам отвечают устойчивые состояния равновесия системы (3). В общем случае она имеет четыре состояния равновесия: $O_1(\varphi_{1,1}, \varphi_{1,1}, 0,0)$, $O_2(\varphi_{2,1}, \varphi_{2,1}, 0,0)$, $O_3(\varphi_{1,2}, \varphi_{2,2}, 0,0)$ и $O_4(\varphi_{2,2}, \varphi_{2,1}, 0,0)$. В зависимости от параметров устойчивой может быть только точка O_1 (область a_1 рис. 2a) или пара точек O_3 и O_4 (область a_2, рис. 2a), что соответствует бистабильности. Синхронные режимы, которым отвечают состояния равновесия O_3 и O_4, различаются распределениями токов по цепям сети, а именно $I_2(O_3)/I_3(O_3) = I_3(O_4)/I_2(O_4) \neq 1$ и $I_3(O_3)/I_3(O_4) \neq 1$, причем $|I_2(O_3)/I_3(O_3)| \neq 1$.



(a) (b)

Рис. 2. Области существования устойчивых состояний равновесия системы (3) (a); разбиение области a_2 и прилегающих к ней областей, на подобласти с различными режимами работы энергосети (b)

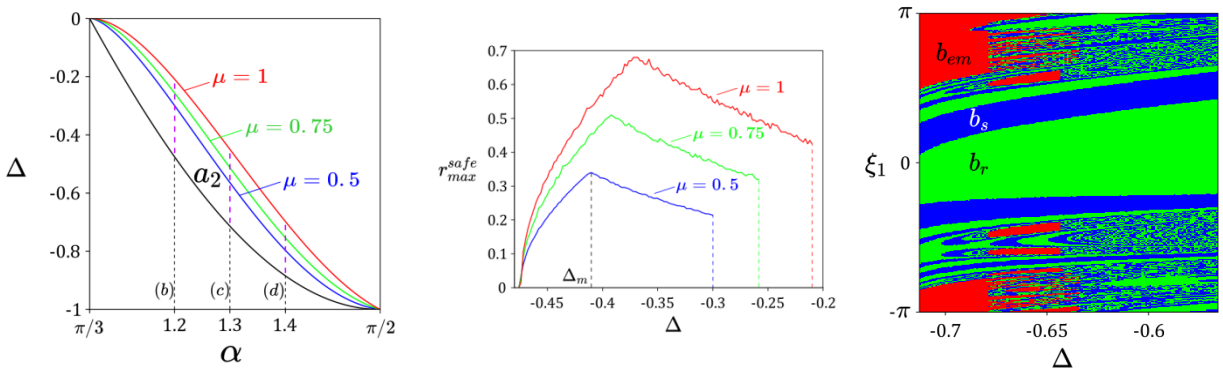
При переходе от одного синхронного режима к другому, вызванному действием каких-либо возмущений, меняется стационарное распределение токов в цепях сети. При возрастании тока в одной из ветвей возможно срабатывание токовых защит, что потенциально может привести к нарушению синхронного режима во всей сети. Поэтому стабильная работа энергосети тесно связана с выбором одного из синхронных режимов, а также его устойчивостью. Установлено, что при параметрах из подобласти $a_2^{(1)}$ (рис. 2b) в сети может установиться только один из двух синхронных режимов. Если же выбрать параметры в подобласти $a_2^{(2)}$ (рис. 2b), то помимо синхронных режимов в сети может установиться асинхронный режим, которому отвечают вращательные предельные циклы и хаотические аттракторы системы (3).

4. Влияние возмущений

В общем случае возмущения приводят к произвольному изменению переменных φ_i и y_i. Если изначально сеть находилась в синхронном режиме, которому отвечает состояние равновесия O_3 (O_4), то после окончания действия возмущения она может вернуться в исходный режим или перейти в другой. Поэтому была получена оценка величины максимального безопасного возмущения r_{max}^{safe} (рис. 3a, 3b), равная минимальному расстоянию от точки O_3 (O_4), то границы ее области притяжения. Все безопасные возмущения переменных системы лежат внутри сферы радиуса r_{max}^{safe} с центром в точке $O_3(O_4)$.

Рассмотрены конкретные виды возмущений – фазовые и частотные. Они приводят к произвольному изменению только одной динамической переменной системы (3) на величину ξ_i, где индексы $i = 1,2$ соответствуют изменениям фазовых переменных φ_1 и φ_2, а индексы $i = 3,4$ – частот y_1 и y_2. Например, фазовое возмущение ξ_1 исходного состояния O_3 может, в зависимости от своей величины, приводить к переходу сети в асинхронный режим (красные области b_{em}, рис. 3c) или к переключению в другой синхронный режим (синие области b_s, рис. 3c), которому отвечает точка O_4. Величина ξ_1 может быть такова, что с течением времени в сети уста-

новится исходный синхронный режим (зеленые области b_r, рис. 3c) . Таким образом, получена классификация величин фазовых возмущений ξ_1 (рис. 3c).



(a) (b) (c)

Рис. 3. Область a_2 при разных значениях параметра μ и области, где производится расчет величины r_{max}^{safe} и классификация возмущений ξ_i (a). Зависимость $r_{max}^{safe}(\Delta)$ (b). Классификация возмущения ξ_1 в зависимости от параметра Δ (c).

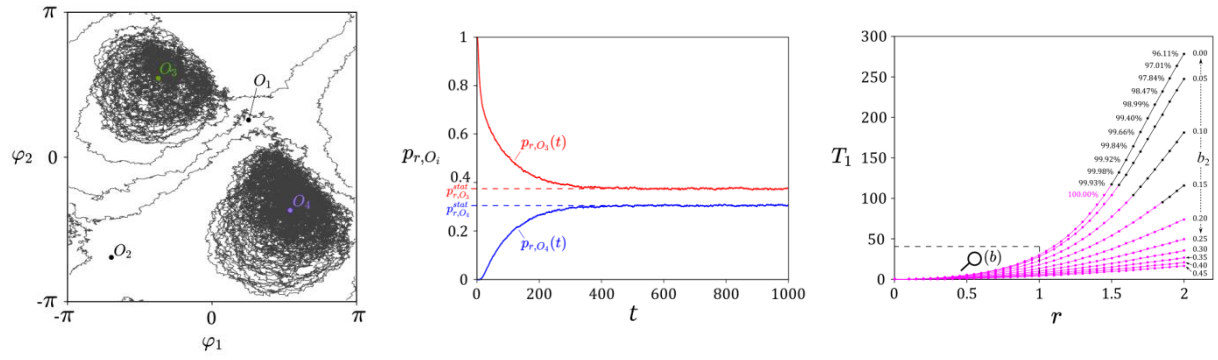
5. Влияние шума

При параметрах из области a_2 система (3) является бистабильной. Известно, что в бистабильных системах переключения между состояниями могут происходить, в частности, под действием шума. Если предположить, что мощности турбин второго и третьего генераторов имеют постоянную детерминированную и переменную флуктуационную составляющие, то при $\mu \gg 1$, динамика сети будет определяться системой стохастических дифференциальных уравнений вида

$$\begin{cases} \dot{\varphi}_1 = \Delta - 2\cos(\alpha)\sin(\varphi_1) - \sin(\varphi_2 - \alpha) + b_1 W_1(t), \\ \dot{\varphi}_2 = \Delta - 2\cos(\alpha)\sin(\varphi_2) - \sin(\varphi_1 - \alpha) + b_2 W_2(t), \end{cases} \quad (4)$$

где b_i – новые параметры, $W_i(t)$ – статистически независимые стандартные виннеровские случайные процессы, описывающие случайные приращения мощностей турбин, обусловленные неравномерностью подачи энергоносителя и несовершенством регулятора, управляющего клапанами тепловой турбины или направляющим аппаратом гидротурбины.

Интегрируя систему (4) с помощью метода Эйлера-Маруямы (Euler-Maruyama method [4]) с начальным условием в точке O_3 (O_4) был получен статистический ансамбль из 30000 реализаций. На его основании даны оценки основных статистических характеристик случайного процесса $\vec{X}(t) = [\varphi_1(t), \varphi_2(t)]$ (рис. 4, a), таких как плотность вероятности – $w(\varphi_1, \varphi_2, t)$, вероятность нахождения изображающей точки в круговых окрестностях с центрами в точках O_3 и O_4 – $p_{r,O_3}(t)$ и $p_{r,O_4}(t)$ (рис. 4, b), а также среднее время первого достижения [5] границы круговой окрестности точки O_3 – $T_1(r)$, r – радиус круговой окрестности (рис. 4c).



(a) (b) (c)

Рис. 4. Одна из реализаций случайного процесса $\vec{X}(t)$ (a). Зависимости $p_{r,O_3}(t)$ и $p_{r,O_4}(t)$ (b). Зависимость $T_1(r)$ при разных значениях параметра b_2 (c).

6. Заключение

Рассмотрена EN модель трехмашинной энергосети. Получены условия, позволяющие привести ее к редуцированной эффективной сети с хаб-топологией. Установлена система дифференциальных уравнений, описывающих такую сеть. В ее рамках найдены параметры, при которых система имеет два устойчивых состояния равновесия, соответствующие существованию двух синхронных режимов в энергосети, которые отличаются распределениями токов по ее цепям. Рассмотрен вопрос об устойчивости синхронных режимов по отношению к различным возмущениям и переключениях между этими режимами.

Литература

1. Anderson P.M., Fouad A.A. Power System Control and Stability // IEEE, Piscataway, 2003.
2. Nishikawa T., Motter A.E. Comparative analysis of existing models for power-grid synchronization // New J. Phys. 17, 015012, 2015. DOI:10.1088/1367-2630/17/1/015012.
3. Khramenkov V.A., Dmitrichev A.S., Nekorkin V.I.; Bistability of operating modes and their switching in a three-machine power grid. Chaos 1 October 2023; 33 (10): 103129. https://doi.org/10.1063/5.0165779.
4. Higham D.J. An algorithmic introduction to numerical simulation of stochastic differential equations // SIAM Rev. 43, iss. 3, pp. 525–546, 2001. DOI:10.1137/S0036144500378302.
5. van Kampen N. Stochastic Processes in Physics and Chemistry // Elsevier Science Publishers, Amsterdam, 1992. DOI: https://doi.org/10.1016/B978-0-444-52965-7.X5000-4.

АСТРОЦИТАРНО-ИНДУЦИРОВАННАЯ ПЕРЕМЕЖАЮЩАЯСЯ СИНХРОНИЗАЦИЯ НЕЙРОНОВ В МАЛЫХ АНСАМБЛЯХ

Д.Д. Яблонский, С.Ю. Маковкин

Нижегородский государственный университет им Н.И. Лобачевского

В данной работе исследуется влияние астроцитарной связи на синхронизацию в мультиплексном нейрон-астроцитарном ансамбле, в биологоправдоподобных живых системах. Было обнаружено, что активность кальция в астроцитах может контролировать совместную динамику нейронов. В частности, астроциты могут вызывать перемежаемую синхронизацию пары синаптически связанных импульсов нейронов Ходжкина-Хаксли на временной шкале кальциевых колебаний.

Ключевые слова: нейроны, астроциты, синхронизация, модель Уллаха-Юнга, модель Ходжкина-Хаксли

1. Введение

В данной работе изучается нейрон-астроцитарный ансамбль, состоящий из двух пар нейронов и астроцитов. Схематическое представление топологии ансамбля нейронов-астроцитов показано на рис.1. Динамика внутриклеточной концентрации Ca^{2+} в астроците описывается моделью Уллаха-Юнга, мембранный потенциал нейрона описывается моделью Ходжкина-Хаксли с модификацией Мэйнена.

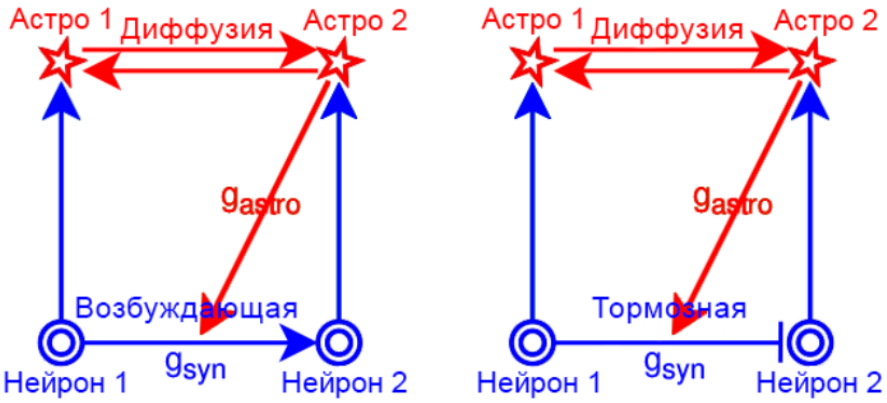


Рис. 1. Схематические иллюстрации исследуемой системы нейронов-астроцитов для двух случаев: с (а) возбуждающими и (б) тормозными синаптическими связями нейронов

2. О синхронизации нейронов

Явление синхронизации играет важную роль в нейронной коммуникации, обработке информации и координации двигательной активности. В данном исследовании используются физиологически значимые модели Ходжкина-Хаксли и Уллаха-Юнга для исследования влияния астроцита на динамику пары синаптически связанных импульсных нейронов. В работе обнаружено, что импульсная активность в нейронах индуцирует медленную колебательную активность в астроцитах, что, в свою очередь, модулирует силу синаптической связи. Это приводит к новому режиму перемежаемой синхронизации между импульсными нейронами в масштабе времени медленных кальциевых колебаний.

2.1. Математические модели нейрона и астроцита

Модель Ходжкина-Хаксли с модификацией Мэйнена:

$$\begin{cases} C\dfrac{dV_i}{dt} = \mu\big(g_{Na}m_i^3h_i(E_{Na}-V_i) + g_k n_i(E_k - V_i) + g_{leak}(E_{leak}-V_i) + I_{app_i} + I_{syn_2}\big); \\ \dfrac{dx_i}{dt} = \mu\big(\alpha_x(1-x_i) - \beta_x x_i\big), x = m,n,h; i = 1,2; \end{cases}$$

где V_i – мембранные потенциалы нейронов, m_i и h_i - переменные активации и инактивации натриевых токов, n_i - переменные активации калиевых токов. Индексы 1 и 2 обозначают управляющий (пресинаптический) и управляемый (постсинаптический) нейроны, соответственно. Токи $Iapp_i$ определяют постоянный уровень деполяризации нейронов и динамический режим (возбудимый, колебательный или бистабильный). Они также задают и контролируют частоту колебаний нейрона в автоколебательном и бистабильном режимах Нелинейные функции для воротных переменных α_x, β_x задаются следующим образом:

$$\alpha_m = \frac{0.182(V_i+35)}{1-e^{\frac{-(V_i+35)}{9}}};\ \beta_m = \frac{-0.124(V_i+35)}{1-e^{\frac{(V_i+35)}{9}}};$$

$$\alpha_n = \frac{0.02(V_i-25)}{1-e^{\frac{-(V_i-25)}{9}}};\ \beta_n = \frac{-0.002(V_i-25)}{1-e^{\frac{(V_i-25)}{9}}};$$

$$\alpha_h = 0.25e^{\frac{-(V_i+90)}{12}};\ \beta_h = 0.25\frac{e^{\frac{V_i+62}{6}}}{e^{\frac{V_i+90}{12}}};$$

Возбуждающая или тормозная однонаправленная нелинейная связь от пресинаптического (ведущего) нейрона к постсинаптическому (ведомому) нейрону реализуется с помощью синаптического тока I_{syn_2}. Этот ток отражает кинетику химического синапса и выражается следующим образом:

$$I_{syn_2} = \frac{\tilde{g}_{syn}(E_{syn}-V_2)}{1+e(-V_1/k_{syn})};$$

где параметр $\tilde{g}_{syn}$ описывает силу синаптической связи. Потенциал E_{syn} = −90 mV для тормозной связи и E_{syn} = 0 mV для возбуждающей синаптической связи. Концентрация нейропередатчика, который высвободился из синапса нейрона, может быть выражена следующим образом :

$$\frac{dG_i}{dt} = -\alpha_G G_i + \frac{\beta_G}{1+e^{\frac{-V_i}{0.5}}};$$

Активность i-го астроцита описывается с помощью следующих переменных: внутриклеточная концентрация Ca^{2+}, доля активированных рецепторов IP3 в эндоплазматическом ретикулуме и внутриклеточная концентрация инозит-1,4,5-трифосфата (IP3), $IP3_i$. Они задаются следующими уравнениями (модель астроцита Уллаха-Юнга):

$$\begin{cases} \dfrac{dCa_i}{dt} = J_{ch} - J_{pump} + J_l + J_{in} - J_{out} + D_{Ca}\Delta Ca_i; \\ \dfrac{dIP3_i}{dt} = \dfrac{IP3^* - IP3_i}{\tau_{IP3}} + J_{PLC} + J_{Glu} + D_{IP3}\Delta IP3_i; \quad ; \\ \dfrac{dz_i}{dt} = a_2\left(d_2\dfrac{IP3_i+d_1}{IP3_i+d_3}(1-z_i) - Ca_i z_i\right); \end{cases}$$

Уравнения для токов, описывающих биохимические процессы внутри астроцита, следующие:

$$J_{ch} = c_1 v_1 IP3_i^3 Ca_i^3 z_i^3 (\frac{c_0}{c_1} - \left(1+\frac{1}{c_1}\right)Ca_i)/[(IP3_i+d_1)(Ca_i+d_5)]^3;$$

$$J_{PLC} = v_4(Ca_i + (1-a)k_4)/(Ca_i + k_4);$$

$$J_l = c_1 v_2(\frac{c_0}{c_1} - \left(1+\frac{1}{c_1}\right)Ca_i);$$

$$J_{pump} = v_3 Ca_i^2/(k_3^2 + Ca_i^2);$$

$$J_{in} = v_5 + v_6 IP3_i^2/(k_2^2 + IP3_i^2);$$

$$J_{out} = k_1 Ca_i;$$

$$J_{Glu} = \frac{\alpha_{Glu}}{1+e^{\frac{-(G_i-0.25)}{0.01}}};$$

Термины ($D_{Ca}\Delta Ca_i$) и ($D_{IP3}\Delta IP3_i$) в уравнениях (5) учитывают диффузию Ca^{2+} и $IP3$ через щелевые контакты между астроцитами; D_{Ca} и D_{IP3} - коэффициенты диффузии для Ca^{2+} и IP3 соответственно, они связаны между собой следующим соотношением: $D_{Ca} = 0.01 \cdot k$, $D_{IP3} = k$; Δ обозначает дискретный оператор Лапласа. Биофизическая интерпретация всех нелинейных

функций и параметров в уравнениях и их значения, которые определены экспериментально, могут быть найдены в работе.

Повышение уровня кальция в астроцитах вызывает высвобождение глиотрансмиттеров, таких как глутамат, ГАМК, АТФ и D-серин. Глиотрансмиттер может модулировать синаптическую силу связи путём связывания с пре- или постсинаптическими терминалами. Среди разнообразных экспериментальных проявлений разных глиопередатчиков рассмотрен эффект астроцитарно-индуцированного усиления синаптической передачи. Этот эффект можно описать с помощью модели, предложенной в работе:

$$\tilde{g}_{syn} = \begin{cases} g_{syn}(1 + g_{astro}Ca_i), & \text{при } Ca_i < 0.3\mu M, \\ g_{syn}, & \text{в остальных случаях;} \end{cases}$$

где параметр g_{astro} – это влияние астроцита на синаптическую передачу, а Ca_i – концентрация астроцитов кальция. Подробное биофизическое описание нейрон-астроцитарного взаимодействия можно найти в работах.

2.2. Динамика одиночного нейрона и одиночного астроцита

Нелинейный анализ динамики одиночного астроцита и одиночного нейрона Ходжкина-Хаксли описан в и соответственно. Здесь используется анализ автономной динамики нейрона, описанного в модели Ходжкина-Хаксли с модификацией Мэйнена (1, 2) для нейрона головного мозга млекопитающих. Из рисунка 2(а), видно, что диаграмма бифуркации нейрона Ходжкина-Хаксли с модификацией Мэйнена качественно аналогична диаграмме нейрона Ходжкина-Хаксли. Динамика системы начинается с устойчивого фокуса, с увеличением $Iapp$ происходит рождение предельного цикла через бифуркацию Андронова-Хопфа. Уменьшая $Iapp$, обнаруживается гистерезис и исчезновение предельного цикла через седлоузловую бифуркацию цикла (рисунок 2(б)). Для данного исследования установлены начальные условия и $Iapp$ каждого нейрона, соответствующие устойчивому фокусу для красного графика и устойчивому предельному циклу для синего графика (таблицы 2 и 3 соответственно). Начальные условия каждого астроцита соответствуют устойчивому фокусу. При увеличении параметра v_4, колебания проходят через мягкую бифуркацию Андронова-Хопфа. Эти колебания исчезают (т.е. устойчивый предельный цикл разрушается) при высоких концентрациях v_4 через бифуркацию двойного предельного цикла. Когда концентрация v_4 уменьшается, колебания на предельном цикле исчезают через седло-узловою бифуркацию цикла. Этот механизм продемонстрирован на рисунке 2(в, г). Для каждого из двух колеблющихся синаптически связанных нейронов рассчитывается мгновенная частота $\nu(t)$, определенная как обратная величина интервала (периода) между максимумами импульсов (Interspike Interval, ISI) каждого из нейронов:

$$\nu(t) = (ISI(t))^{-1};$$

Также определяется относительная фаза потенциалов действия $\Delta\varphi_{2,1}$, как сдвиг во времени между ответным (постсинаптическим) импульсом $t_{post}(n)$ и соответствующим предшествующим импульсом в пресинаптическом нейроне $t_{pre}(n)$:

$$\Delta\varphi_{1,2}=2\pi\frac{t_{post}(n) - t_{pre}(n)}{T};$$

где T – период колебаний между пресинаптическими импульсами ведущего (управляющего) нейрона, а n = 1, 2, 3, . . . отвечают за индекс постсинаптического колебания. В исследовании считается, что нейроны являются синхронизованными во временном интервале t_s, если отсутствуют сдвиги по фазе на этом интервале и разница между мгновенными частотами нейронов была меньше чем 1%: $|\nu_2(t_n) - \nu_1(t_n)| < 0.2$ с$^{-1}$. Все такие временные интервалы суммируются, когда нейроны синхронизированы во времени t_s, нормированному по всему времени наблюдения t_{tot}, и получается относительное время синхронизации $\frac{t_s}{t_{tot}}$. Когда относительное время синхронизации равно 1, два нейрона являются синхронизированными все время наблюдения.

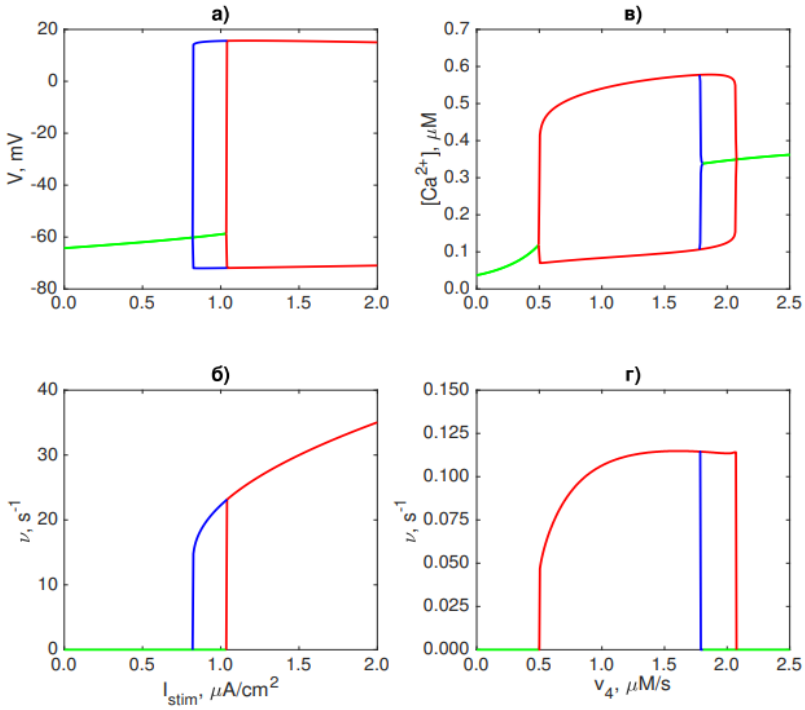


Рис. 2. (а) диаграмма возникновения устойчивого фокуса и предельного цикла; (б) диаграмма работы одиночного нейрона с бифуркациями Андронова-Хопфа и седло-узловой бифуркации на цикле на границах бистабильного участка; (в) диаграмма бифуркации одиночного астроцита, устойчивый фокус показан зеленым цветом, устойчивый предельный цикл красным цветом, приведена амплитуда колебания для предельного цикла; когда управляющий параметр IP3* увеличивается, а затем уменьшается, наблюдается гистерезис (синяя кривая при уменьшении); (г) частоты астроцита (IP_3*= 0.16)

Для астроцитов, по причине того что у них присутствует двусторонняя возбуждающая диффизонная связь, используется аналогичный критерий: если разница между мгновенными частотами астроцитов меньше чем 1% или $|\nu_2(t_n) - \nu_1(t_n)| < 0.001$ с$^{-1}$, считаем что астроциты синхронизированы по частоте, что соответствует значению 1 на регионе синхронизации, если астроциты не синхронизированы по частоте, тогда на области синхронизации этому соответствует знание 0.

Кроме того, для оценки значения разности фаз во времени используется дисперсия разности фаз:

$$D = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(\Delta\varphi_{1,2\,i} - \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\Delta\varphi_{1,2\,i})^2,$$

где N – количество спайков на постсинаптическом нейроне.

Точнее, применяется значение корень из дисперсии фаз $\sqrt{D}$, для того чтобы это значение имело размерность в радианах, такую же как у разности фаз $\Delta\varphi_{1,2}$. Если корень из дисперсии разности фаз $\sqrt{D}$ равняется нулю, это значит, что разность фаз $\Delta\varphi_{1,2}$ установилась во времени и остается незменной величиной, если корень из дисперсии разности фаз $\sqrt{D}$ больше нуля, это значит между нейронами возникают биения и постоянная разность фаз $\Delta\varphi_{1,2}$ между ними никогда не наступит.

2.3. Частотная синхронизация двух астроцитов в системе

Астроцитарная модуляция синаптической связи нейронов улучшает синхронизацию между колеблющимися нейронами. Влияние астроцитов на динамику пары связанных нейронов заключается в стимуляции синхронизации колебательной активности нейронов за счет управляемого астроцитами увеличения нейронной синаптической силы связи. Изолированные два астроцита в системе. Рассчитан регион синхронизации в области параметров Δv_4 и k. Что соответствует расстройке частот и силе связи между двумя астроцитами. Область синхронизации показана на рисунке 3(а). Происходит расчет разницы фаз спайков астроцитов и значения корня из

дисперсии разницы фаз. Отличное от нуля значение корня из дисперсии разницы фаз говорит о наличии биений в системе двух астроцитов.

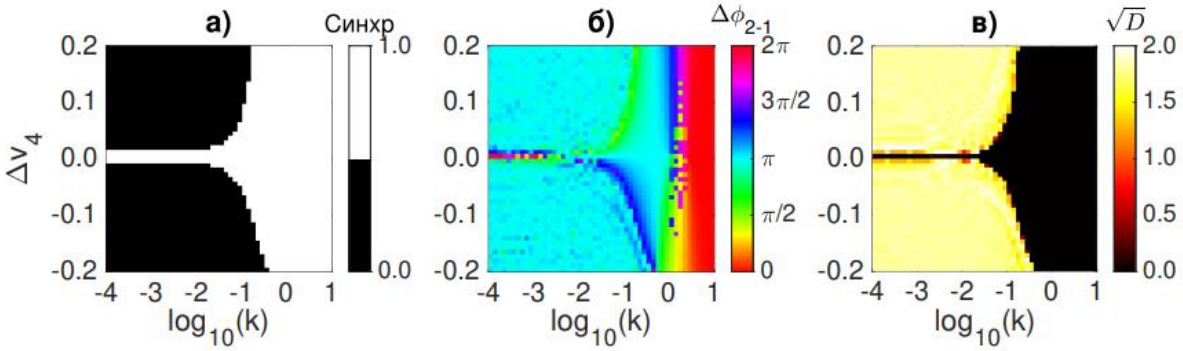


Рис. 3. (а) частотный регион синхронизации двух взаимодействующих астроцитов через двустороннюю возбуждающую диффузионную связь. $\Delta\nu_4 = \nu_{4\,2} - \nu_{4\,1}$, $\nu_{4\,1} = 0.75$ – фиксированное значение; (б) разница фаз двух астроцитов в зависимости от разницы частот и силы двусторонней диффузионной связи k между ними; (в) корень из дисперсии разницы фаз. $\Delta\nu_4 = \nu_{4\,2} - \nu_{4\,1}$, $\nu_{4\,1} = 0.75$ – фиксированное значение

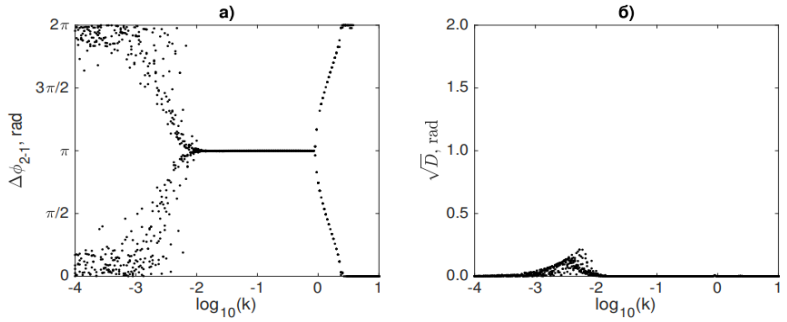


Рис. 4. (а) разница фаз двух астроцитов на одинаковой частоте в зависимости от силы двусторонней диффузионной связи k между ними; (б) корень из дисперсии разницы фаз. $\nu_{4\,1} = \nu_{4\,2} = 0.75$; данные изображения полностью соответствуют значениям на рисунках 3(б) и 3(в) при значении параметра $\Delta\nu_4 = 0$

2.4. Частотная и фазовая синхронизхации двух нейронов

Нейроны изолированы друг от друга, не связаны с астроцитами, астроциты не воздействуют на нейроны. Управляющий нейрон может воздействовать на управляемый либо возбуждающей, либо тормозной связью. Из рисунка 5 видно, что с увеличением частотной расстройки между нейронами, требуется большая сила связи, на то, чтобы установить синхронизацию и при возбуждающей, и при тормозной связи. Также отметим, что область синхронизации не является симметричной. Главный нейрон с более высокой частотой колебаний, через возбуждающую однонаправленную импульсную связь, увеличивает частоту срабатывания подчиненного нейрона, и, соответственно наоборот для тормозящей связи.

2.5. Влияние возбуждающих и тормозных астроцитов на синхронизацию нейронов

Пример вызванной астроцитами синхронизации показан на рис. 6. Первоначально колебания нейронов вызывают колебания кальция в астроците. При достижении порога внутриклеточной концентрации Ca^{2+}, астроцит усиливает синаптическую силу связи между нейронами, и они синхронизируются в противофазе на интервале времени равном длительности импульсов кальция в астроците. В отсутствие астроцитарного воздействия система проявляет биения из-за расстройки частоты между связанными осцилляторами (рис. 6(а, б)). Однако, астроцит может ослаблять синаптическую силу связи между нейронами.

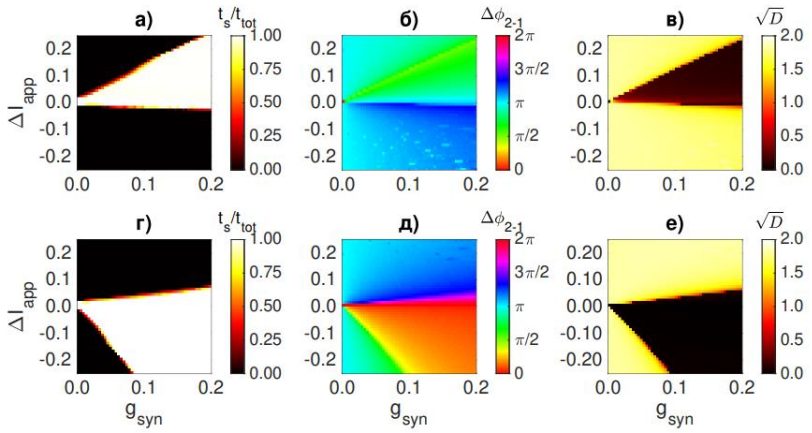


Рис. 5. g_{astro} = 0.0; отсутствие влияния астроцитов на синаптическую межнейронную связь. Астроциты в системе отсутствуют; (а) граница частотной синхронизации, относительное время синхронизации для тормозной связи между нейронами; (б) разница фаз между двумя нейронами, связанными через тормозную связь; (в) корень из дисперсии разницы фаз двух нейронов, связанных тормозной связью; (г) граница частотной синхронизации, относительное время синхронизации для возбуждающей связи между нейронами; (д) разница фаз между двумя нейронами, связанными через возбуждающую связь; (е) корень из дисперсии разницы фаз двух нейронов, связанных возбуждающей связью; $\Delta I_{app} = I_{app\,2} - I_{app\,1}$, $I_{app\,1}$ = 1.30 – фиксированное значение

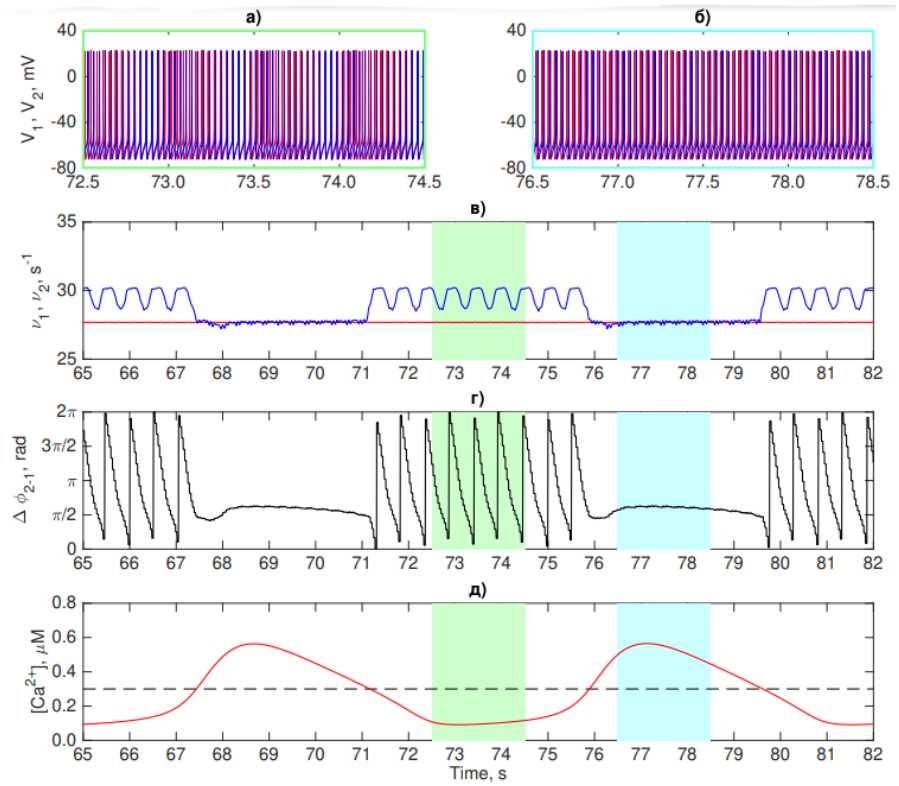


Рис. 6. Динамика двух тормозносинаптически связанных колеблющихся нейронов с возбуждающим астроцитарным воздействием; (а) импульсы двух связанных нейронов в режиме частотной и фазовой синхронизации; (б) импульсы двух связанных нейронов в асинхронном режиме (биения); (в) мгновенные частоты нейронов; для (а-в) красный цвет соответствует пресинаптическому нейрону (управляющему или ведущему), синий цвет – постсинаптическому (управляемому или ведомому); (г) относительные фазы; (д) два периода динамики увеличения внутриклеточной концентрации кальция в астроците; пунктирная линия показывает порог активации для астроцитарного влияния на синаптическую силу связи; параметры: g_{syn} = 0.1, g_{astro} = 2.0, $I_{app\,1}$ = 1.30 $\mu A/cm^2$, $I_{app\,2}$ = 1.50 $\mu A/cm^2$

Литература

1. Ullah G., Jung P., Cornell-Bell A. H. 2006. Anti-phase calcium oscillations in astrocytes via inositol (1,4,5)-trisphosphate regeneration. // Cell Calcium, 39 (197–208).
2. Hodgkin, A.L., Huxley, A.F. 1952. A quantitative description of membrane current and its application to conduction and excitation in nerve. // The Journal of physiology, 117 (4) 500-544.
3. Mainen, Z.F., Joerges, J., Huguenard, J.R., Sejnowski, T.J. 1995. A model of spike initiation in neocortical pyramidal neurons. // Neuron, 156 (6), 1427-1439.
4. Araque, A., Carmignoto, G., Haydon, P. G., Oliet, S. H., Robitaille, R., and Volterra, A. 2014. Gliotransmitters travel in time and space. // Neuron, 81, 728-739.
5. Kanakov, O., Gordleeva, S., Ermolaeva, A., Jalan, S., Zaikin, A. 2019. Astrocyte-induced positive integrated information in neuron-astrocyte ensembles. // Physical Review E, 99(1), 012418.
6. Gordleeva, S.Y., Lebedev, S.A., Rumyantseva, M.A., Kazantsev, V.B. 2018. Astrocyte as a detector of synchronous events of a neural network. // JETP Letters, 107(7), 440-445.
7. Pankratova, E.V., Kalyakulina, A.I., Stasenko, S.V., Gordleeva, S.Y., Lazarevich, I.A., Kazantsev, V.B. 2019. Neuronal synchronization enhanced by neuron–astrocyte interaction. // Nonlinear Dynamics, 1-16.
8. Matrosov V., Gordleeva S., Boldyreva N., Ben-Jacob E., Kazantsev V. 2018. Emergence of regular and complex calcium oscillations by inositol 1, 4, 5-trisphosphate signaling in astrocytes. // Computational Glioscience, 1, 151-176.
9. Kazantsev, V.B., Asatryan, S.Y. 2011. Bistability induces episodic spike communication by inhibitory neurons in neuronal networks. // EPL (Physical Review E), 84(3), 031913.

DETERMINING THE PRESENCE OF HEART DISEASE BY ECG IN THE PTB-XL DATASET USING DEEP LEARNING[1*]

Vyacheslav Razin, Alexander Krasnov, Denis Karchkov, Viktor Moskalenko, Denis Rodionov, Nikolai Zolotykh, Lev Smirnov, Grigory Osipov

Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod

Determining whether a person has heart problems by ECG recording is an extremely relevant and important task in medicine. The paper explores the use of deep learning to solve this problem. It can be seen that neural networks show good indicators of the predictive ability of the presence of heart disease by analyzing the ECG record. The use of ensembles makes it possible to improve the predictive ability of the program, and 3 types of ensemble demonstrate the greatest accuracy at once. Artificial models in this case do not make any positive contribution to ensemble predictions. From the data of trained deep learning models, features can be extracted for further use in machine learning models. You can also use the weights of these networks to solve similar ECG diagnostic problems. Integration into various medical diagnostic systems is possible, for example, the real-time system "Cardiomayak", developed at the National Research Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod.

Keywords: Deep learning, ECG diagnostics, Recurrent neural network, Convolutional neural network, Ensemble, Artificial intelligence, Binary classification.

1. Introduction

Determining whether a person has heart problems by ECG recording is an extremely relevant and important task in medicine. The paper explores the use of deep learning to solve this problem.

PTB-XL is one of the world's largest open heart disease [1] datasets hosted by PhysioNet [2]. The problem of binary classification of the presence of heart diseases or their absence according to the ECG records from this dataset is solved.

Approaches for the classification of time series are described in many works [3-4] using various architectures of neural networks and methods [5-7].

2. Data and methods

2.1. Data

The data is all records of the selected data set with a sampling rate of 100 Hz. All data were normalized by means. The data is divided into training and testing samples in a ratio of 9:1.

2.2. Binary classification metrics

As a metric for assessing the predictive ability of models, the accuracy is used, which shows the proportion of correctly predicted predictions of trained neural networks and ensembles.

2.3. Methods

Based on the results of the experiments, 10 best neural network architectures were identified:

- conventional convolutional network [8] (hereinafter CNN);

[1*] Results obtained in numerical experiments with convolutional neural networks are supported by Ministry of Science and Education of Russian Federation, project 0729-2021-013. Results obtained in numerical experiments with recurrent neural networks are supported by the Federal academic leadership program Priority 2030.

- separable convolutional network [9] (hereinafter SCNN);
- AlexNet-based network [10] (hereinafter AlexNet);
- combination of a convolutional network with bidirectional LSTM and GRU [11] (hereinafter CBB);
- Inception-based network [12] (hereinafter Inception);
- recurrent network LSTM [13] (hereinafter LSTM);
- GRU recurrent network [14] (hereinafter GRU);
- combination of LSTM and GRU (hereinafter LG);
- VGG16 based network [15] (hereinafter VGG16);
- Xception-based network [16] (hereinafter Xception).

Also in this work, 7 types of ensembles were used:

- arithmetic mean of prediction probabilities of 2 classes (hereinafter mla);
- weighted average (the greater the accuracy, the greater the contribution) of prediction probabilities of 2 classes (hereinafter mlk);
- arithmetic mean of rounded prediction probabilities of 2 classes (hereinafter fmla);
- weighted average (the greater the accuracy, the greater the contribution) of rounded prediction probabilities of 2 classes (hereinafter fmlk);
- arithmetic mean of class number predictions (hereinafter nca);
- weighted average (the greater the accuracy, the greater the contribution) of class number predictions (nck);
- mode (if parity, then the first element is returned) among the class number predictions (hereinafter ncd).

3. Experimental results

3.1. Description of the task

2 classes are predicted (HEALTH and SICK). The HEALTH class is all entries from PTBXL that only have the NORM class have a 1 and all others have zeros. The SICK class is assigned to the remaining entries.

3.2. The ensemble with the best predictive power

As a result of the experiments, an ensemble was found consisting of 6 deep learning models: VGG16, Inception, LSTM, GRU, Xception and CNN. The ABS of this ensemble is 89.49% (rounded to the nearest hundredth).

3.3. The ensemble with the best predictive power

Determination of the most suitable models for classification occurs experimentally. After training, each model is measured for its accuracy and compared with previous results. If the accuracy has increased, then the new weights for the selected neural network are saved. There is also a comparison between the deep learning models themselves, as well as various ensembles.

2 classes are predicted (HEALTH and SICK). The HEALTH class is all entries from PTBXL that only have the NORM class have a 1 and all others have zeros. The SICK class is assigned to the remaining entries.

At the beginning, the accuracies for each model are given. Accuracy scores of neural networks are shown in Table 1 (highest accuracy for each case in bold).

Table 1. Accuracy for all neural networks (as a percentage, rounded to hundredths)

Model name	Accuracy
AlexNet	87.93
VGG16	88.99
Inception	88.25
CBB	87.65
LSTM	88.11
GRU	87.98
Xception	88.34
SCNN	88.25
LG	87.88
CNN	87.84

You can see that the VGG16 neural network shows the highest accuracy.

For all ensemble types, such a set of participants is searched (by exhaustive enumeration), which in total produces the largest accuracy. Table 2 shows the accuracy scores for each ensemble. The highest accuracy score for each case is shown in bold.

Table 2. Accuracy of ensembles from all neural networks

Ensemble name	Accuracy
mla	89.26
mlk	89.31
fmla	89.35
fmlk	**89.49**
nca	89.35
nck	**89.49**
ncd	**89.49**

It can be seen that the ensembles fmlk, nck and ncd show the highest accuracy.

Finally, to the models that were the best in the ensemble, we add 2 artificial models that always return the same class number in their predictions (each one is different). According to the results of the experiment, the accuracy remained at the same level and they do not allow improving the previous result.

4. Conclusions

It can be seen that neural networks show good indicators of the predictive ability of the presence of heart disease by analyzing the ECG record. The use of ensembles makes it possible to improve the predictive ability of the program, and 3 types of ensembles demonstrate the greatest accuracy at once. Artificial models in this case do not make any positive contribution to ensemble predictions.

From the data of trained deep learning models, features can be extracted for further use in machine learning models. You can also use the weights of these networks to solve similar ECG diagnostic problems. Integration into various medical diagnostic systems is possible, for example, the real-time system "Cardiomayak", developed at the National Research Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod.

In the future, it is planned to consider other, more complex architectures of neural networks, the use of new unproven methods of machine learning, as well as take other types of ensembles. It is also planned to consider more complex diagnostic tasks and introduce explainable artificial intelligence to solve the tasks.

References

1. Wagner, P., Strodthoff, N., Bousseljot, R. D., Kreiseler, D., Lunze, F. I., Samek, W., Schaeffter, T. PTB-XL, a large publicly available electrocardiography dataset. Scientific data, 7(1), 1(2020).

2. Goldberger, A.L., Amaral, L.A., Glass, L., Hausdorff, J.M., Ivanov, P.C., Mark, R.G., ... & Stanley, H.E. (2000). PhysioBank, PhysioToolkit, and PhysioNet: components of a new research resource for complex physiologic signals. circulation, 101(23), e215-e220.
3. Nikolsky, A.V., Levanov, V.M., Karchkov, D.A., Moskalenko, V.A. Efficiency of diagnosing cardiovascular diseases in the format of a specialized service of automatic telemonitoring using the cyberheart software and hardware complex. Ural Medical Journal, (7), 64(2020).
4. Kalyakulina, A.I., Yusipov, I.I., Moskalenko, V.A., Nikolskiy, A.V., Kozlov, A.A., Zolotykh, N.Y., Ivanchenko, M.V. Finding morphology points of electrocardiographic-signal waves using wavelet analysis. Rad. Quan. Elec., 61(8), 689(2019).
5. Rodionov, D., Karchkov, D., Moskalenko, V., Nikolsky, A., Osipov, G., & Zolotykh, N. (2022, October). Possibility of Using Various Architectures of Convolutional Neural Networks in the Problem of Determining the Type of Rhythm. In Advances in Neural Computation, Machine Learning, and Cognitive Research VI: Selected Papers from the XXIV International Conference on Neuroinformatics, October 17-21, 2022, Moscow, Russia (pp. 362-370). Cham: Springer International Publishing.
6. Moskalenko V., Zolotykh N., Osipov G., Deep learning for ECG segmentation // International conference on Neuroinformatics. Springer, Cham. 246(2019).
7. Rodionov, D.M., Karchkov, D.A., Moskalenko, V.A., Nikolsky, A.B., Osipov, G.V., Zolotykh, N.Yu. (2022). DIAGNOSTICS OF SINUS RHYTHM AND FIBILITY BY ARTIFICIAL INTELLIGENCE. Problems of Informatics, (1 (54)), 77(2022).
8. Albawi, S., Mohammed, T. A., & Al-Zawi, S. (2017, August). Understanding of a convolutional neural network. In 2017 international conference on engineering and technology (ICET) (pp. 1-6). Ieee.
9. Hu, Z., Hu, Y., Liu, J., Wu, B., Han, D., & Kurfess, T. (2018). 3D separable convolutional neural network for dynamic hand gesture recognition. Neurocomputing, 318, 151-161.
10. Ismail Fawaz, H., Lucas, B., Forestier, G., Pelletier, C., Schmidt, D. F., Weber, J., ... & Petitjean, F. (2020). Inceptiontime: Finding alexnet for time series classification. Data Mining and Knowledge Discovery, 34(6), 1936-1962.
11. Huang, Z., Xu, W., & Yu, K. (2015). Bidirectional LSTM-CRF models for sequence tagging. arXiv preprint arXiv:1508.01991.
12. Wang, C., Chen, D., Hao, L., Liu, X., Zeng, Y., Chen, J., & Zhang, G. (2019). Pulmonary image classification based on inception-v3 transfer learning model. IEEE Access, 7, 146533-146541.
13. Hochreiter, S., & Schmidhuber, J. (1997). Long short-term memory. Neural computation, 9(8), 1735-1780.
14. Cho, K., Van Merriënboer, B., Gulcehre, C., Bahdanau, D., Bougares, F., Schwenk, H., & Bengio, Y. (2014). Learning phrase representations using RNN encoder-decoder for statistical machine translation. arXiv preprint arXiv:1406.1078.
15. Simonyan, K., & Zisserman, A. (2014). Very deep convolutional networks for large-scale image recognition. arXiv preprint arXiv:1409.1556.
16. Jinsakul, N., Tsai, C. F., Tsai, C. E., & Wu, P. (2019). Enhancement of deep learning in image classification performance using xception with the swish activation function for colorectal polyp preliminary screening. Mathematics, 7(12), 1170.

СОДЕРЖАНИЕ

М.Х. Абузяров, Е.Г. Глазова, А.В. Кочетков, М.А. Кочетков
Моделирование процесса взрывного разрушения подводного газопровода на основе метода Годунова 4

Н.Ф. Алексиадис
О проблеме полноты для функциональной системы рациональных функций с рациональными коэффициентами (алгоритмический подход) 8

Д.А. Бакалина, Н.В. Барабаш
Кусочно-линейное моделирование систем лоренцевского типа 13

В.В. Баландин, Вл.Вл. Баландин, А.В. Водопьянов, Д.А. Мансфельд, К.В. Минеев, В.В. Пархачёв, Р.М. Розенталь
Обработка результатов измерений быстропротекающих механических процессов методом микроволновой интерферометрии без преобразования частоты 16

Н.В. Барабаш, В.Н. Белых, И.В. Белых
Цепи подков Смейла и истинная сложность аттрактора с двойной спиралью 21

Р.С. Бирюков, Е.С. Бубнова
Обобщённое H_2 управление линейной дескрипторной системой непрерывного времени 25

Е.А. Благовещенская, И.И. Микулик, Н.В. Груздев
Использование прямых разложений абелевых групп без кручения в задачах распределения структурированных ресурсов 29

В.М. Боголюбов, Л.У. Бахтиева, О.В. Цыганов
Датчик абсолютной угловой скорости на основе модуляционного микромеханического гироскопа 32

М.М. Бузмакова, П.Д. Пучинина, С.В. Русаков
Применение технологий параллельных вычислений для решения перколяционной задачи *k*-меров в континууме 37

Д.А. Волков, Е.А. Каледина, О.Е. Каледин
Реализация алгоритма гибридной фильтрации для прогнозирования успеваемости студентов вуза 41

А.А. Горчавкина, А.М. Сатанин
Структура спектра случайных древовидных матриц 47

А.А. Емельянова, В.И. Некоркин
Влияние правила адаптации на синхронизацию в сети неоднородных осцилляторов Курамото с симплексными взаимодействиями 51

В.Т. Жуков, Н.Д. Новикова, О.Б. Феодоритова
Вычислительная модель нестационарных многокомпонентных газодинамических течений с учетом процессов сопряженного теплообмена 53

М.Г. Забегалов, К.А. Баркалов
Повышение эффективности процесса шихтования в горнодобывающей промышленности с использованием методов оптимизации 58

И.В. Захаров, Д.Б. Мокеев
Упаковки путей в пороговых графах 62

В.И. Звонилов
Жёсткие изотопии вещественных алгебраических кривых малых степеней 65

Е.Д. Илларионова, О.И. Москаленко
Численный анализ возможности существования мультистабильности вблизи границы синхронизации, индуцированной шумом 70

М.А. Козлов, Е.А. Панова, И.Б. Мееров
Реализация поиска наиболее часто встречающихся последовательностей ДНК с использованием библиотеки Kokkos 73

А.В. Кондратьева, М.И. Кузнецов
Классы изоморфизма простых неальтернирующих гамильтоновых алгебр Ли 79

М.М. Краснов, О.Б. Феодоритова
Применение библиотеки функционального программирования для переноса численных задач на графические ускорители CUDA 82

А.С. Кулешов, А.А. Шишков
О качении тяжелого однородного шара по поверхности вращения второго порядка и по тору 93

И.Г. Лебедев, Д.В. Надумин, С.Н. Карпенко
Использование нейросетевой аппроксимации в задачах глобальной оптимизации 98

О.В. Любимцев, А.А. Туганбаев
Фактор-кольца и подпрямая неразложимость центрально существенных колец 102

Е.А. Мищенко, И.Ю. Демин
Использование машинного обучения для сегментации УЗИ изображений скелетной мышцы 106

Т.Т. Нгуен, Л.У. Бахтиева
О модели потенциала действия клеток миокарда 112

П.А. Пылов, Р.В. Майтак, А.В. Протодьяконов
Разработка эвристического алгоритма на базе интеллектуальной модели глубокого обучения для определения качества угля по его фотографическим данным 117

В.В. Разин
Реализация разрешающего алгоритма для теории плотного линейного порядка без концевых точек на языке Haskell 121

Ю.А. Родимков, А.М. Трыкин
Адаптация бустинга нейронных сетей для решения задач PINN 125

А.В. Рыбкин, Р.О. Смирнов, Е.Е. Котихина, Д.А. Карчков, В.А. Москаленко, Г.В. Осипов, Л.А. Смирнов
Анализ эпикардиальных электрограмм средствами искусственного интеллекта 129

В.П. Савельев
Проблема Фробениуса для трех натуральных чисел, два из которых соседние 135

С.В. Сидоров, П.А. Щербаков
Свойства длин периодов по модулю D последовательностей числителей и знаменателей подходящих дробей для $\sqrt{D}$ 138

А.В. Старченко
Параллельный численный метод решения гидродинамических уравнений в приближении мелкой воды для вычислительных систем с общей памятью 142

Е.Б. Титова
Исследование миноров матрицы инцидентности d-мерного куба при помощи сингулярного многочлена 147

И.С. Ульяничев
Архитектура распределенной вычислительной системы на базе мобильных устройств 150

Г.В. Уткин
Критерий подобия над кольцом целых чисел некоторых нильпотентных матриц пятого порядка 154

В.А. Ханадеев, О.И. Москаленко
Мультистабильность вблизи границы обобщенной синхронизации в системах с запаздыванием 158

В.А. Храменков
Сосуществование и переключения синхронных режимов в модели трехмашинной энергосети 161

Д.Д. Яблонский, С.Ю. Маковкин
Астроцитарно-индуцированная перемежающаяся синхронизация нейронов в малых ансамблях 166

Vyacheslav Razin, Alexander Krasnov, Denis Karchkov, Viktor Moskalenko, Denis Rodionov, Nikolai Zolotykh, Lev Smirnov, Grigory Osipov
Determining the presence of heart disease by ECG in the PTB-XL dataset using deep learning 173

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И СУПЕРКОМПЬЮТЕРНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

Труды XXIII Международной конференции

Нижний Новгород, 13–16 ноября 2023 г.

Под ред. проф. Д.В. Баландина

Отв. за выпуск К.А. Баркалов

Публикуется в авторской редакции

Издательство Нижегородского госуниверситета им. Н.И. Лобачевского.
603950, Н. Новгород, пр. Гагарина, 23.